数理化自学丛书

代数

第一册

数理化自学丛书

代　　数

第 一 册

数理化自学丛书编委会
数学编写小组编

上海科学技术出版社

数理化自学丛书

代　数（第一册）

数理化自学丛书编委会
数学编写小组编

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）

北京出版社重印
北京市新华书店发行
北京印刷二厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 9.75　字数 214,000
1963年10月第1版　1978年12月第1次印刷

书号：13119·533　　定价：0.61元

内 容 提 要

本书是数理化自学丛书中代数第一册，内容包括有理数、代数式、整式、因式分解、分式、比和比例等六章，只要具备算术的基本知识即可阅读．书中在一些重要的地方都作了直观的反复说明或分析，并附有大量例题和习题，供练习巩固之用．

本书可供青年工人，知识青年，在职干部自学，也可供中等学校青年教师参考．

重 印 说 明

《数理化自学丛书》是一九六六年前出版的．计有《代数》四册，《平面几何》二册，《三角》一册，《立体几何》一册，《平面解析几何》一册；《物理》四册；《化学》四册．这套书的特点是：比较明白易懂，从讲清基本概念出发，循序前进，使读者易于接受和理解，并附有不少习题供练习用．这套书可以作为青年工人、知识青年和在职干部自学之用，也可供中等学校青年教师教学参考，出版以后，很受读者欢迎．但是在"四人帮"及其余党控制上海出版工作期间，这套书横被扣上所谓引导青年走白专道路的罪名，不准出版．

英明领袖华主席和党中央一举粉碎了祸国殃民的"四人帮"．我国社会主义革命和社会主义建设进入新的发展时期．党的第十一次全国代表大会号召全党、全军、全国各族人民高举毛主席的伟大旗帜，在英明领袖华主席和党中央领导下，为完成党的十一大提出的各项战斗任务，为在本世纪内把我国建设成为伟大的社会主义的现代化强国，争取对人类作出较大的贡献，努力奋斗．许多工农群众和干部，在党的十一大精神鼓舞下，决心紧跟英明领袖华主席和党中央，抓纲治国，大干快上，向科学技术现代化进军，为实现四个现代化作出贡献，他们来信要求重印《数理化自学丛书》．根据读者的要求，我们现在在原书基础上作一些必要的修改后，重新出版这套书，以应需要．

十多年来，科学技术的发展是很快的．本丛书介绍的虽仅是数理化方面的基础知识，但对于应予反映的科技新成就方面内容，是显得不够的．同时，由于本书是按读者自学的要求编写的，篇幅上就不免有些庞大，有些部分也显得有些烦琐．这些，要请读者在阅读时加以注意．

对本书的缺点，希望广大读者批评指出，以便修订时参考．

一九七八年一月

目　录

第一章 有 理 数

读者们都学过了算术．我们现在要开始学习代数了．代数和算术，虽然是两门学科，但它们却是紧密地联系着的．算术里有许多内容，都是在学习代数时必须用到而且经常要用到的，因此，我们在开始学习代数的时候，要先来复习一下算术里学过的一些有关数的运算的知识．

§1·1 算术里有关数的运算知识的复习

1．算术里学过的数 算术里学过哪一些数呢？我们先来看一看下面这些数：

(1) 1, 2, 3, 5, 16, 30, 132, 478;

(2) 0;

(3) 3.5, 0.326, 0.0037, 364.24;

(4) $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{13}$, $1\frac{2}{3}$, $\frac{13}{7}$.

你认识这些数吗？能够说出这四类数的名称吗？

在第一类数里，1, 2, 3, 5, 16 等，它们都是在我们数个数时按照 1, 2, 3, 4, 5, 6, … 这样的次序一个一个顺次数下去时，总会数到的．这样的数叫做**自然数**．自然数的个数是无限多的．任何一个自然数总还有比它更大的自然数．

第二类数只有一个，就是 0，读做“零”，它不是自然数．

第一类和第二类数都叫做整数，也就是说，**自然数和零都**

叫做**整数**.

第三类数 3.5, 0.326, 0.0037 等叫做**小数**，小数里的圆点叫做**小数点**.

第四类数 $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{13}$, $1\frac{2}{3}$ 等叫做**分数**. 各个分数中间的一划叫做**分数线**,分数线上面的这个数叫做**分子**,分数线下面的这个数叫做**分母**.

在算术里所学过的小数,实际上也是分数的一种写法.例如, 3.5 就是 $3\frac{5}{10}$, 0.326 就是 $\frac{326}{1000}$, 0.0037 就是 $\frac{37}{10000}$, 364.24 就是 $364\frac{24}{100}$. 所以我们说:算术里所学过的数,就是整数和分数.

2. 算术里学过的运算

(1) 四种基本运算: 我们在算术里学过哪几种运算呢?

我们学过四种运算,就是**加法**、**减法**、**乘法**和**除法**. 这四种运算,总起来叫做**四则运算**.

加法是从两个加数求它们的和的运算,如 $3+5=8$, 那就是:

加数甲 + 加数乙 = 和.

任意两个数,总可以相加,求出它们的和来.

减法是已知两个加数的和与其中一个加数求另一个加数的运算. 已知的和叫做被减数,已知的一个加数叫做减数,所求的另一个加数叫做差,如 $8-5=3$, 那就是:

被减数 − 减数 = 差.

在算术里,减法不是一定可以进行的. 只有当减数小于被减数或者等于被减数的时候,减法才能够进行. 如果减数大于被减数,如 $3-4$, 在算术里,这个减法就不能做.

乘法是从两个数求它们的积的运算，这两个数一个叫做被乘数，另一个叫做乘数，也可以把这两个数都叫做因数．如 $8\times5=40$，这里是：

$$被乘数\times乘数=积;$$

或

$$因数甲\times因数乙=积.$$

任意两个数，总可以相乘，求出它们的积来．

除法是已知两个因数的积与其中一个因数求另一个因数的运算，已知的积叫做被除数，已知的一个因数叫做除数，所求的另一个因数叫做商，如 $40\div5=8$，那就是：

$$被除数\div除数=商.$$

当我们只学到整数的时候，除法不一定可以除尽，例如 $16\div3$ 就不能除尽，只能得到部分的商 5，同时得余数 1．但当我们学习了分数以后，那末只要除数不是零，除法就总可以进行，例如

$$16\div3=5\frac{1}{3}.$$

零不能作为除数，因为拿零作为除数是没有意义的．

(2) 逆运算关系：**减法是加法的逆运算**，减法里的被减数，就是加法里的和，减法里的减数，就是加法里的一个加数，而减法里的差，就是加法里的另一个加数．它们之间的关系如下：

加法	减法
加数甲＋加数乙＝和	被减数－减数＝差

例如 $8+5=13$，即得 $13-5=8$，或 $13-8=5$．

除法是乘法的逆运算，除法里的被除数，就是乘法里的积，除法里的除数，就是乘法里的一个因数，而除法里的商，就是乘法里的另一个因数．它们之间的关系如下：

乘法　　　　　　　　　　　除法

因数甲×因数乙＝积　　　　被除数÷除数＝商

例如 $8\times5=40$，即得 $40\div5=8$，或 $40\div8=5$．

3．算术里学过的运算符号和关系符号　在算术里，我们学过下面这三类符号：

(1) 有关运算种类的符号：

加号	$+$	读做“加”，或“加上”；
减号	$-$	读做“减”，或“减去”；
乘号	$\times$	读做“乘以”；
除号	$\div$	读做“除以”；

注　除号的读法要特别注意，有人读做“除”，那是不确当的．如 $16\div2$ 应该读做“十六除以二”，不要读做“十六除二”．我们要养成正确读出符号的习惯．

分数里把分子分母隔开的这条“分数线”，实际上也是一个除号，例如 $\frac{11}{12}$，实际上就是 $11\div12$．

(2) 括号：括号是一种关于运算顺序的符号．括号有小括号(　)、中括号[　]、大括号{　}．

注　有时还应用“括线”，例如 $\{[(3-\overline{5-4})\times8+3]\times2+1\}\times3+5$，小括号里边 $\overline{5-4}$ 的上面的一条线，就是括线，表示 $5-4$ 要先进行运算．

在分数里的分数线，既有除号的意义，有时也带有括号的意义，例如 $\frac{25-4}{8+6}$，$25-4$ 与 $8+6$ 都要先做，然后再把分子除以分母，这里的分数线就既有除号的意义，又有括号的意义．在繁分数里，我们还要依

照分数线的长短来确定运算次序的先后，例如 $\dfrac{32}{\dfrac{4}{2}}$ 就是 $32\div(4\div2)=32\div2=16$，而 $\dfrac{\dfrac{32}{4}}{2}$ 就是 $(32\div4)\div2=8\div2=4$. 这里两条分数线的长短，就相当于括号的大小的区别了.

(3) 数的大小关系的符号：在算术里，我们学习过三种关于数的大小关系的符号：

等　号	$=$	读做"等于"	例如 $3+5=8$,
大于号	$>$	读做"大于"	例如 $5>2$,
小于号	$<$	读做"小于"	例如 $1<4$.

4．算术里学过的运算顺序的规定　在一个包含几个运算的式子里，对运算的先后次序，有下面这些规定：

(1) 在一个没有括号的算式里，如果只含有加减运算（叫做第一级运算），或者只含有乘除运算（叫做第二级运算），应该从左往右依次运算.

(2) 在一个没有括号的算式里，如果既含有第一级运算，也含有第二级运算，应该先做第二级运算（乘、除），后做第一级运算（加、减）. 简单说起来，就叫做"**先乘除、后加减**".

(3) 一个算式里有括号的，括号里面的运算要先做. 如果有几种括号，先算最里层的小括号里面的运算，再算较外面的中括号里面的运算，最后才算最外面的大括号里面的运算. 如果括号里面也有几种运算，同样按照上面(1)、(2)两条规定的次序进行演算.

例1. 计算：$16+5-8+100-113$.

分析　这里只有第一级运算——加、减运算，按照规定(1)，运算从左到右一步一步进行.

【解】 $16+5-8+100-113=21-8+100-113$
$=13+100-113$
$=113-113=0.$

例 2. 计算：$18\div3\times2\times4$.

分析 这里只有第二级运算，按照规定(1)，运算从左到右一步一步进行.

【解】 $18\div3\times2\times4=6\times2\times4=12\times4=48.$

例 3. 计算：$540\div18+5\times64-40\div2$.

分析 这里既有第一级运算，又有第二级运算，按照规定(2)，先做乘除，后做加减.

【解】 $540\div18+5\times64-40\div2=30+320-20$
$=350-20=330.$

例 4. 计算：$8-\{7-[6-(5-1)-2]-1\}$.

分析 这里有三层括号，先做小括号里面的运算，再做中括号里面的运算，再做大括号里面的运算，再做括号外面的运算. 每一次把括号内的式子算出结果以后，这个括号就失去作用，可以不必再写了.

【解】 $8-\{7-[6-(5-1)-2]-1\}$
$=8-\{7-[6-4-2]-1\}$
$=8-\{7-0-1\}=8-6=2.$

例 5. 计算：
$\{[(24-16)\times3-4\times6]\div(36\div3-2\times5)+40\}\div4.$

【解】 $\{[(24-16)\times3-4\times6]\div(36\div3-2\times5)+40\}\div4$
$=\{[8\times3-4\times6]\div(12-10)+40\}\div4$
$=\{[24-24]\div2+40\}\div4=\{0\div2+40\}\div4$
$=\{0+40\}\div4=40\div4=10.$

例 6. 计算：$\left[\left(1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}\right)\div3\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right]\div8\frac{8}{9}+\frac{1}{4}.$

【解】 $\left[\left(1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}\right)\div3\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right]\div8\frac{8}{9}+\frac{1}{4}$

$$=\left[4\frac{1}{6}\div3\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right]\div8\frac{8}{9}+\frac{1}{4}$$

$$=\left[\frac{25}{6}\times\frac{4}{15}-\frac{2}{5}\right]\div\frac{80}{9}+\frac{1}{4}$$

$$=\left[\frac{10}{9}-\frac{2}{5}\right]\div\frac{80}{9}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{32}{45}\times\frac{9}{80}+\frac{1}{4}=\frac{2}{25}+\frac{1}{4}=\frac{33}{100}.$$

注意　分数的加减法里，如原有分母不相同，必须进行通分，在乘除运算中，各个带分数要化成假分数，并须随时注意约分，化成最简分数.

例 7．计算：$\dfrac{3+\dfrac{1}{7}}{5-\dfrac{1}{3}}$.

分析　这是繁分数，中间的分数线是兼有括号的作用，所以 $3+\frac{1}{7}$ 的加法与 $5-\frac{1}{3}$ 的减法都要先做.

【解】 $\dfrac{3+\dfrac{1}{7}}{5-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\dfrac{22}{7}}{\dfrac{14}{3}}=\dfrac{22}{7}\div\dfrac{14}{3}=\dfrac{22}{7}\times\dfrac{3}{14}=\dfrac{33}{49}.$

例 8．计算：$\left(5\frac{1}{2}-0.37\right)\times0.4+1\frac{1}{8}$.

分析　这个算式里既有分数又有小数，因为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{8}$ 都可以化做有限小数，所以这个题目可以用两种方法来计算：(1) 把小数先化成分数后再算；(2) 把分数先化成小数后再算.

【解 1】 化成分数做：

$$\left(5\frac{1}{2}-0.37\right)\times 0.4+1\frac{1}{8}$$
$$=\left(5\frac{1}{2}-\frac{37}{100}\right)\times\frac{4}{10}+1\frac{1}{8}$$
$$=5\frac{13}{100}\times\frac{2}{5}+1\frac{1}{8}$$
$$=\frac{513}{100}\times\frac{2}{5}+1\frac{1}{8}=\frac{513}{250}+1\frac{1}{8}$$
$$=2\frac{13}{250}+1\frac{1}{8}=3\frac{177}{1000}.$$

【解 2】 化成小数做:

$$\left(5\frac{1}{2}-0.37\right)\times 0.4+1\frac{1}{8}$$
$$=(5.5-0.37)\times 0.4+1.125$$
$$=5.13\times 0.4+1.125$$
$$=2.052+1.125=3.177.$$

例 9. 计算: $\left(3\frac{1}{3}+0.33\right)\times\frac{1}{2}-1.35.$

分析　这里 $\frac{1}{3}$ 不能化成有限小数，所以要先把小数化成分数后再算.

【解】 $\left(3\frac{1}{3}+0.33\right)\times\frac{1}{2}-1.35$

$$=\left(3\frac{1}{3}+\frac{33}{100}\right)\times\frac{1}{2}-1\frac{35}{100}$$
$$=3\frac{199}{300}\times\frac{1}{2}-1\frac{35}{100}$$
$$=\frac{1099}{300}\times\frac{1}{2}-\frac{135}{100}$$
$$=\frac{1099}{600}-\frac{810}{600}=\frac{289}{600}.$$

习 题 1·1

回答下列问题(1～7)：

1．写出三个自然数来．写出最小的自然数来．有没有最大的自然数？

2．在算术里，“整数”和“自然数”这两个名称有没有区别？有什么区别？

3．写出四个分数来，其中两个是真分数，两个是假分数．$\frac{3}{3}$是真分数还是假分数？

4．写出三个繁分数来，其中一个的分母是整数，分子是分数；另一个的分母是分数，分子是整数；还有一个的分母分子都是分数．再把它们化成普通分数．

5 写出三个小数来，并把它们化成分数．

6．在算术里，加法、乘法、减法、除法是不是总可以进行？那些运算在怎样的情况下不能进行？

7．零可以做除数吗？零可以做被除数吗？

计算(8～20)：

8．$328+672\div(72\div9\times4)$.

9．$(56+44)\times0+1\div1+0\div100+9$.

10．$1+2\times\{2+3\times[3+4\times(4+5\times6)\times7\div8]-9\}$.

11．$18\div\left\{1-\left[\frac{2}{5}+\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{2}{5}\right]\right\}$.

12．$\left(13\frac{1}{2}-3\frac{2}{3}\times1+5\frac{5}{12}\div2\frac{1}{6}\right)\times\frac{3}{37}$.

13．$3.6+43.05+1.8-13.08-4.87$.

14．$7.5\times15.2\div(38\times2.5\times0.06)$.

15．$(3.54-2.54\times0.7)\times1.2$.

16．$\left[\left(\frac{1}{2}+0.3\right)\times0.5+\frac{1}{4}\times0.16\right]\div11$.

17．$0.3\times0.2-\frac{1}{7}\times0.15$.

18. $\dfrac{3}{\dfrac{2}{5}}-\dfrac{\dfrac{3}{2}}{5}$.

19. $\dfrac{\dfrac{1}{3}}{5}\div\dfrac{1}{\dfrac{3}{5}}$.

20. $\left(1-\dfrac{426}{697}+\dfrac{2\frac{1}{2}}{8\frac{1}{2}}\right)\div\dfrac{3\frac{1}{2}}{5\frac{1}{8}}$.

§1·2 负数的引进

让我们看这样的问题:

在温度计上，某一天下午的温度是7°，如果半夜里的温度比下午的温度下降6°，那末半夜里的温度是多少呢?

这个问题很容易做，只要用减法，得

$$7-6=1,$$

就可以知道半夜的温度是1°.

现在让我们再看一个类似的问题:

在温度计上，某一天下午的温度是3°，如果半夜里的温度比下午的温度下降4°，那末半夜里的温度是多少呢?

这个问题和上面的问题性质是一样的. 照理它也可以用减法来解.

但是，如果我们列出式子，就得到3－4.

这里被减数小于减数，在算术里这个算式是没有意义的.

这个问题到底有没有意义呢?

在实际生活中，我们都了解这个问题是有意义的. 从3°下降4°，半夜里的温度是零下1°.

从温度计上，我们知道，有零上1°，也有零下1°，虽然同样是1°，实际意义是不同的. 要说明它们之间的区别，必须

说明是“零上”还是“零下”.

如果我们想省去“零上”“零下”这些字眼，而又不使零上的度数与零下的度数混淆不清，那么，除了原有算术里所学过的数以外，还需要引进新的数来解决这个问题.

我们采用原有的算术里的数来表示零和零上的度数，如零度写成 0°，零上 1° 写成 1°，把原来算术里的数的前面加上一个符号“－”(读做“负”)来表示零下的度数，如零下 1° 就写成 －1°，零下 20° 就写成 －20°. 这里 －1，－20 是一种新的数，叫做**负数**. 在引进了负数以后，我们把算术里学过的数，除了 0 以外，都叫做**正数**. 为了使正数与负数区别清楚起见，我们也可以在正数的前面加上一个符号“＋”(读做“正”)，如 20 写成 ＋20，1 写成 ＋1 等.

＋30 读做正三十，－30 读做负三十，正数前面的“＋”号叫做“**正号**”，负数前面的“－”号叫做“**负号**”.

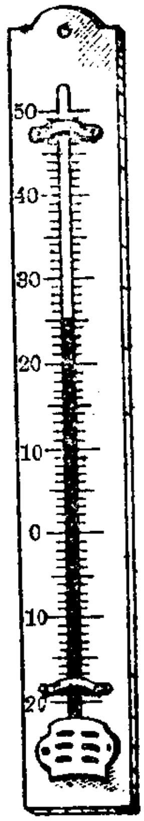


图 1·1

注 正号“＋”和负号“－”，它们指出数的性质，所以把它们叫做**性质符号**.

＋1，－1，＋20，－20 这些数是不是只有温度计里用得到呢？让我们再看一个例子.

某人在一条公路上骑自行车要从甲地到乙地. 有人告诉他要行 20 公里路程. 这个人骑自行车走了 20 公里之后一问，并没有到达乙地，却和乙地相差 40 公里了.

为什么会这样呢？

原来他走错了一个方向. 从甲地到乙地，应该是往东走

的，但他却往西走，所以越走越远了.

从这里可以看出，路程上也有一个方向的问题. 例如向东和向西是两个相反的方向，同样走20公里路，方向不同，效果就完全不一样. 向东走20公里和向西走20公里是两个具有相反方向的量，就和温度计上零上与零下的温度是两个具有相反方向的量一样. 为了表示路程及其方向，我们可以象温度计上的度数一样，指定一个方向作为正方向，譬如把向东作为正方向，那末向东的20公里就用 +20公里或20公里来表示，读做正20公里，把相反的方向向西的20公里用 −20公里来表示，读做负20公里，这样，相反的方向就可以区别开来了.

在生活实践中，具有两种相反方向或两种相反意义的量是很多的，都可以用正数和负数来表示. 例如，把高出海面的高度作为正方向，那末某一个高山高出海面7000米可以写做高度是 +7000米或7000米，另一个低地低于海面100米可以写做高度是 −100米；又如把收入当做正，支出当做负. 某人每月工资收入60元可以写做 +60元，生活支出20元可以写做 −20元等. 具有相反意义或相反方向的量是很多的，因此负数的应用是非常广泛的.

习 题 1·2

1. 读出下列各数：

$$+24,\quad -16,\quad +3\frac{1}{3},\quad -5\frac{2}{7},$$

$$+3.6,\quad -0.43,\quad -30543.$$

2. 用正数或负数来表示下列温度：

零上18°，零上100°，零下16°，零下273°.

3. 如果在一条东西向的公路上，把向东方向作为正方向，怎样表示向东 75 公里？向西 75 公里？向西 $9\frac{1}{2}$ 公里？ +50 公里是什么意思？ −50 公里是什么意思？

4. 如果在比赛篮球时胜 16 分用 +16 分来表示，怎样表示输 16 分？ +2 分是什么意思？ −2 分呢？

5. 如果某仓库运入某种货物 5000 斤，用 +5000 斤来表示，那么运出 3000 斤如何表示？

6. 用正数或负数表示下列各位置的高度：

(1) 喜马拉雅山的主峰珠穆朗玛峰高出海面 8848 米；

(2) 我国新疆吐鲁番洼地的最低处低于海面 154 米.

7. 如果 3 小时以后用 +3 小时来表示，怎样表示 5 小时以后？ 3 小时以前？ +8 小时是什么意思？ −6 小时呢？

8. 飞机上升 8000 米用 +8000 米来表示，−3000 米表示什么意思？

§1·3 有 理 数

我们在上节里学到了负数，为了区别，把算术里学到过的数，除零以外，都叫做正数. 这样，我们就有三种数：正数、负数和零. 正数可以有整数、分数和小数，负数也可以有整数、分数和小数. 例如 +1，+2，+135 等既是正数，又是整数，我们把它们叫做**正整数**. 正整数实际上就是自然数. $3\frac{1}{3}$，$+\frac{2}{5}$ 等叫做**正分数**，0.7，+3.23 等叫做**正小数**. 同样，−1，−2，−100 等叫做**负整数**；$-3\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{5}$ 等叫做**负分数**；−0.7，−3.23 等叫做**负小数**. 零既不是正数，也不是负数. 这些数总起来应该有一个名称，我们把它们都叫做**有理数**. 它们之间的关系，可以列成下表：

$$
\text{有理数}\begin{cases}
\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数(就是自然数)，如 } +1,\ +2,\ +135\text{ 等(或写做 } 1,\ 2,\ 135\text{ 等)}\\ \text{正分数(包括正小数)，如 } +\frac{1}{2},\ +5\frac{1}{3},\ +0.7\text{ 等}\left(\text{或写做 }\frac{1}{2},\ 5\frac{1}{3},\ 0.7\text{ 等}\right)\end{cases}\\
\text{零}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{只有一个数 }0\\
\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数，如 } -1,\ -2,\ -3,\ -10\text{ 等}\\ \text{负分数(包括负小数)，如 } -3\frac{1}{3},\ -5.74\text{ 等}\end{cases}
\end{cases}
$$

注　正有理数和零，就是我们在算术里学过的数，总称做非负有理数．注意非负和正是有区别的．

正整数、零与负整数，都是整数．所以在代数里，我们所说的整数与在算术里所讲的整数，意义不同了．在算术里，整数只指正整数(自然数)和零，而在代数里，它就包括负整数了．以后我们讲到整数，都应该这样来理解．

习　题　1·3

1．写出三个正整数来；写出三个负整数来；写出一个既不是正的也不是负的整数来．

2．写出三个正分数来；写出三个正小数来；写出三个负分数来；写出三个负小数来．

3．354 是正数吗？是整数吗？是正整数吗？是自然数吗？是有理数吗？

4．-354 是自然数吗？是整数吗？是有理数吗？

5．零是自然数吗？是正数吗？是负数吗？是整数吗？是有理数吗？

6．写出任意 5 个不同的有理数来；写出任意 3 个非负有理数来，写出任意 3 个非负整数来．

7．自然数一定是正整数吗？一定是整数吗？整数一定是自然数吗？

§1·4 数　轴

我们在量身高的时候，通常可用一根直立的木尺，划上许多横格，并注明一些表示长度的数字(一般用厘米作为单位长度). 当一个人站到下面的垫板上时，他的足底刚刚对准这根尺的起点，从他的头顶所对的尺上的位置，可以读出他的身高的厘米数来. 这就是说，对于每一个身体高度的厘米数，这根木尺上有一个和它对应的位置.

我们容易想到，是不是对于所有的有理数，正的、负的和零，也可以有类似这样的尺，使每一个有理数都能在尺上找到它的对应的位置呢？

有的. 事实上温度计就是这样一根尺. 在温度计上，我们既有对应于正的度数的点，也有对应于零度的点，并且还有对应于负的度数的点.

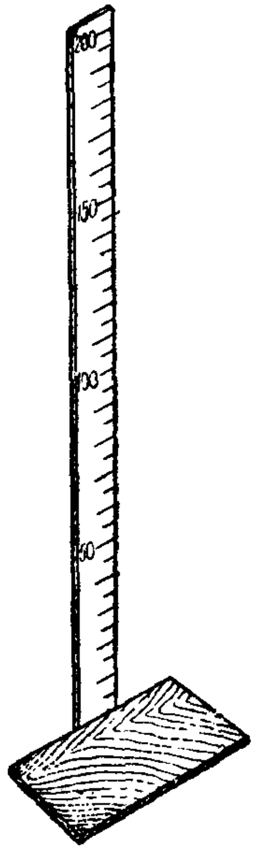


图 1·2

用同样的方法，我们可以用一条直线上的点来表示全部有理数.

现在说明如下：

任意画一条水平方向的直线，规定它的一个方向是正的，和它相反的方向是负的(通常规定向右的方向是正的，向左的方向是负的)，画一个箭头表示它的**正方向**，如图 1·3.

如同木尺上的起点和温度计上的零度点一样，我们在这条直线上任意取一点 0，表示有理数零，这一点叫做原点. 如

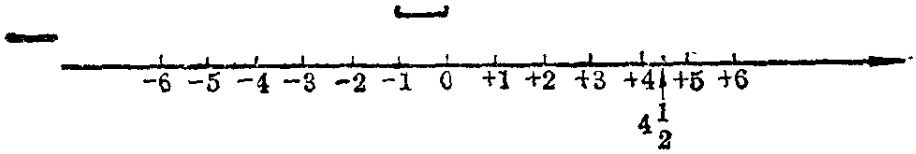


图 1·3

同木尺上的厘米长度和温度计上的一度的格子一样，我们可以任意指定一个**单位长度**，画在这条直线的旁边．然后在直线上，从原点 0 开始，依照这个单位长度，向右一次一次的截过去，顺次得到对应于正整数的各点的位置 $+1$，$+2$，$+3$，$+4$，… 等；再从原点 0 开始，依照这个单位长度，向左一次一次的截过去，顺次得到对应于负整数的各点的位置，-1，-2，-3，-4，… 等．如果我们要表示分数 $4\frac{1}{2}$ 的位置，那末只要从原点 0 向右依照单位长度截取 4 次，再截取相当于单位长度的一半，得到的点就表示有理数 $4\frac{1}{2}$ 了．用同样的方法，我们可以在这条直线上找出表示任意有理数的点．这种用来表示数的直线叫做**数轴**．

从上面所讲，我们可以看出：

数轴是一条用来表示数的直线，它要有规定的正方向，原点和单位长度．

从图上可以看出，所有表示正数的点都在原点的右边，所有表示负数的点都在原点的左边．原点本身就表示既不是正数也不是负数的数 0．

数轴上表示一个数的点叫做这个数的对应点，所有不相等的数都有不同的对应点．

习 题 1·4

1．画出一条数轴．标出它的原点，正方向和单位长度．在这条数

轴上指出下列各数的对应点：$+3$，-3，0，$1\frac{1}{2}$，$-2\frac{1}{3}$.

2. 数轴上原点右面的点表示的是什么数？左面的点呢？

3. 数轴上会不会有两个不同的点表示同样的数？

4. 数轴上会不会有一个点表示两个不同的数？

5. 画出一条数轴，在数轴上作出下列各个数的对应点：$+5$，-5，$+1$，-1，$+2\frac{1}{2}$，$-2\frac{1}{2}$，0.

从图上各点的左右位置，把这7个数依照对应点的位置，从左到右排列起来.

6. 从上面这个题目的各点的位置，看看：$+5$与-5的两个对应点与原点的距离一样吗？这两点的位置有什么不同？$+1$与-1呢？$+2\frac{1}{2}$与$-2\frac{1}{2}$呢？

§1·5 相反的数

1. 相反的数的概念 在数轴上，$+5$和-5是由两个不同的点表示的，一个在原点的正方向，一个在原点的负方向，方向恰恰相反，但它们和原点的距离却是相等的．同样，$+1$与-1的两个对应点也在原点的相反方向而和原点的距离相等；$+2\frac{1}{2}$与$-2\frac{1}{2}$的两个对应点也在原点的相反方向而和原点的距离相等．我们把这样的两个数叫做**相反的数**．例如，$+5$与-5是相反的数，我们说$+5$是-5的相反的数，-5也是$+5$的相反的数．同样，$+1$与-1是两个相反的数，$+1$的相反的数是-1，-1的相反的数是$+1$．每一个正数，总有一个负数和它对应，成为它的相反的数；每个负数，总有一个正数和它对应，成为它的相反的数．只有数零，它的相反的数就是这个数零本身.

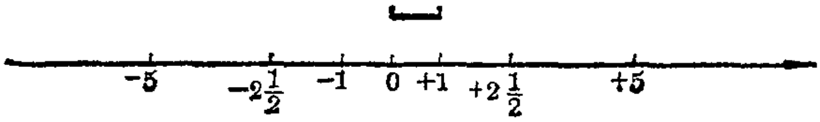


图 1·4

就是：

任何一个正数的相反的数是一个负数；

任何一个负数的相反的数是一个正数；

0 的相反的数还是 0.

2. 表示一个数的相反的数的方法 因为 $+3$ 就是 3，所以在 3 的前面添上一个"$+$"号，和 3 没有任何区别．同样，在 $+3$ 前面再添上一个"$+$"号，写成 $+(+3)$，和 $+3$ 或者 3 也没有任何区别(这个括号是为了避免两个"$+$"号连写而加上去的)；在 -3 前面再添上一个"$+$"号，写成 $+(-3)$，它和 -3 没有区别．

因为 -3 是 3 的相反的数，所以在 3 的前面添上一个"$-$"号，就成为 3 的相反的数了．同样，在 $+3$ 前面添上一个"$-$"号，写成 $-(+3)$，也表示它是 $+3$ 的相反的数，就是 -3；在 -3 的前面再添上一个负号，写成 $-(-3)$，它就是 -3 的相反的数 $+3$.

在 0 的前面添上一个"$+$"号或者"$-$"号，仍旧是 0，即

$$+0=0;\quad -0=0;\quad +(+0)=0;\quad +(-0)=0;$$
$$-(+0)=0;\quad -(-0)=0.$$

表示一个数的相反的数的法则：要表示一个数的相反的数，只要在这个数前面添上一个"$-$"号；如果这个数前面原来有正负号，要先添上括号后再在前面添"$-$"号．

例 表示下列各数的相反的数，并把它化简：

(1) $+3.5$; (2) $-7\frac{1}{2}$.

【解】 (1) $+3.5$ 的相反的数是

$$-(+3.5)=-3.5;$$

(2) $-7\frac{1}{2}$ 的相反的数是

$$-\left(-7\frac{1}{2}\right)=+7\frac{1}{2}.$$

习 题 1·5

1. 写出下列各个数的相反的数：$+3$, -2, $\frac{2}{3}$, -1.5, 0, 把这些数和它们的相反的数在数轴上标注出来.

2. 有没有一个数的相反的数就是这个数本身？说出这个数来. 还有没有其他的数的相反的数也和它本身相等？

3. $+5$ 的相反的数是什么？ $+5$ 的相反的数的相反的数是什么？ -3 的相反的数是什么？ -3 的相反的数的相反的数是什么？ $\frac{2}{3}$ 的相反的数的相反的数是什么？ -3.64 的相反的数的相反的数是什么？

从上题的一些例子，回答下列的问题：

一个数的相反的数的相反的数是什么？

4. 表示下列各数的相反的数并化简：

(1) $+5$; (2) -3; (3) $+2\frac{1}{2}$; (4) -106.3.

5. 化简：

(1) $+(+5)$; (2) $+(-16.3)$;

(3) $+\left(3\frac{2}{3}\right)$; (4) $+(-301)$;

(5) $-(+6)$; (6) $-(-24)$;

(7) $-(+1.36)$; (8) $-\left(-3\frac{1}{3}\right)$;

(9) $-[+(-5)]$; (10) $+[-(+3.2)]$;

(11) $-[-(+1)]$; (12) $-[-(-3)]$.

[解法举例：(1) $+(+5)=+5=5$.]

§1·6 数的绝对值

在一条公路上，从某一点甲处向一个方向行 30 公里到乙处和向相反的方向行 30 公里到丙处，乙和丙是不同的地点。但这两个点和出发点的距离却是一样的，都是 30 公里。

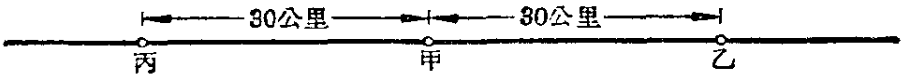


图 1·5

有的时候，我们只需要研究两个地点之间的距离而不需要研究它们的方向。例如我们要研究从甲地到乙地或从甲地到丙地的火车运行的时间，或者火车所消耗的煤的数量，那末只要它们的距离都是 30 公里，就知道运行的时间和消耗的煤量是相等的，至于向东或向西的方向问题，在这里就不必研究了。

从这个例子可以看出，以向东方向为正方向，我们向东行 30 公里就是走了 $+30$ 公里，到达的目的地与出发点的距离是 30 公里；向西行 30 公里就是走了 -30 公里，到达的目的地与出发点的距离也是 30 公里。

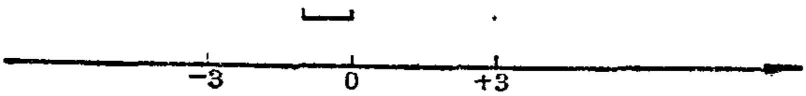


图 1·6

同样地，在一个数轴上，数 $+3$ 的对应点与原点的距离是 3 (或 $+3$)，数 -3 的对应点与原点的距离也是 3 (或 $+3$)。**在数轴上表示一个数的点离开原点的距离，叫做这个数的绝对值。**

根据上面一些例子，对于数的绝对值，我们规定：

数的绝对值：正数的绝对值就是这个正数本身，负数的绝对值是它的相反的数，零的绝对值就是0.

我们在数的两旁各画一条竖线，来表示这个数的绝对值。例如我们说 $+30$ 的绝对值就是 $+30$，写做

$|+30|=+30$；读做“$+30$ 的绝对值等于 $+30$”；

同样，$|-30|=+30$；读做“-30 的绝对值等于 $+30$”；

$|0|=0$　　读做“0 的绝对值等于 0”.

因为　$|+5|=+5$，　$|-5|=+5$；

所以　$|+5|=|-5|$.

同样地我们有：$|-3|=|+3|$；$\left|+3\frac{1}{3}\right|=\left|-3\frac{1}{3}\right|$等等.

我们说：两个相反的数的绝对值是相等的.

习　题　1·6

1. 一个数的绝对值，能够是负数吗？一个数的绝对值一定是正数吗？

2. 写出下列各数的绝对值，并把它的读法写出来：

$$+5,\ -3,\ 7,\ -6.33,\ 0,\ 11\frac{7}{12},\ -6\frac{5}{8}.$$

[解法举例：$|+5|=+5$，读法：$+5$ 的绝对值等于 $+5$；
$|-3|=+3$，读法：-3 的绝对值等于 $+3$.]

3. 计算：

(1) $|-16|+|-24|+|+30|$；　　(2) $|-16|+|-24|-|-30|$；

(3) $|-16|\times\left|-3\frac{1}{2}\right|$；　　(4) $|-5.2|-|-3.56|$；

(5) $|-0.3|\times|+0.2|$.

[解法举例：(1) $|-16|+|-24|+|+30|=16+24+30=70$.]

4. 化简：

(1) $-(-3)$；　　(2) $-|-3|$；

说明它们的区别。

5．写出 $+5$ 与 -5 的绝对值来。

6．写出绝对值等于 3 的两个数来。

§1·7　有理数大小的比较

在算术里，我们已经知道数可以比较大小．现在我们把数扩充到有理数，是不是所有的有理数也都能够比较大小呢？

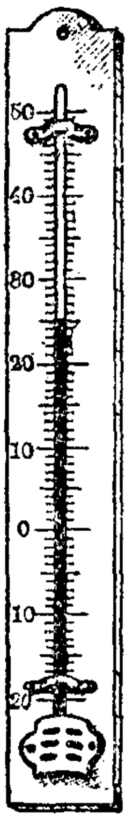


图 1·7

我们不妨仍旧从温度计上来研究．零上 5° 与零下 5° 是不是相等的温度呢？如果不相等，那末哪一个温度高呢？零上 5° 与零下 6° 哪一个温度高呢？零下 2° 与零下 1° 哪一个温度高呢？零度与零下 1° 哪一个温度高呢？从温度计上可以看出：零上 5° 与零下 5° 的温度是不相等的，零上 5° 高于零下 5°，零上 5° 也高于零下 6°，零下 2° 则低于零下 1°，零度也高于零下 1°．

如果把零上的度数用正数来表示，零下的度数用负数来表示，那末上面的结果就是：

$$+5^\circ > -5^\circ,\quad +5^\circ > -6^\circ,$$

$$-2^\circ < -1^\circ,\quad 0^\circ > -1^\circ.$$

同样，我们也可以从它们在数轴上的对应点的位置来确定有理数的大小：

有理数大小的规定：在水平数轴上表示的两个有理数，如果把向右方向作为正方向，那末，在右边的一个数总比在左边的一个数大．

例如：$+5>-5$；$+5>-6$；$-2<-1$；$0>-1$．

从数轴上的左右关系，我们又可以清楚地看出：

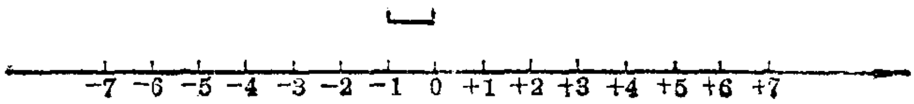


图 1·8

有理数大小的比较法则:

(i) 任何正数,大于任何负数;

(ii) 任何正数,大于零;

(iii) 任何负数,小于零;

(iv) 两个正数中,绝对值大的那个数较大;

(v) 两个负数中,绝对值大的那个数较小.

例 1. 比较 3.56 与 -8.39 的大小.

【解】 3.56 是正数, -8.39 是负数,

∵ 任何正数大于任何负数,

∴ $3.56>-8.39$. (也可以写做 $-8.39<3.56$.)

注 记号"∵"读做"因为","∴"读做"所以".

例 2. 比较 0 与 -7.8 的大小.

【解】 因为任何负数小于零,

∴ $-7.8<0$. (也可以写做 $0>-7.8$.)

例 3. 比较 -3.56 与 -4.07 的大小.

分析 -3.56 与 -4.07 都是负数,先看它们的绝对值.

【解】 $|-3.56|=3.56$, $|-4.07|=4.07$,

$$4.07>3.56,$$

也就是 $$|-4.07|>|-3.56|.$$

根据两个负数大小的比较法,绝对值大的负数较小,

$$\therefore\quad -4.07<-3.56.$$

例 4. 比较 $-\frac{2}{3}$ 与 $-\frac{3}{4}$ 的大小.

【解】 $\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}$, $\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}$.

$\because\ \frac{2}{3}<\frac{3}{4}$, $\therefore\ -\frac{2}{3}>-\frac{3}{4}$.

例 5. 比较下列三个数的大小：$+3$, -5, -1.

【解】 在这三个数中，$+3$ 最大，-1 又比 -5 大，

$\therefore\ +3>-1>-5$.

注意 三个数同时比较大小时，书写的次序必须使两个不等号都是“大于号”或者都是“小于号”. 所以这一题也可以写做 $-5<-1<+3$. 但下列写法是错误的：$-5<3>-1$，因为这样就看不出 -5 与 -1 之间的大小了。

习 题 1·7

1. 写出四个大于 0 的整数；写出四个小于 0 的整数.

2. 写出所有小于 7 的正整数；写出所有大于 -5 的负整数.

3. 写出所有大于 -3 而小于 $+4$ 的整数，并在数轴上把它们表示出来. 这些数里面，有几对相反的数？

4. 比较下列各组数的大小，用关系符号“$<$”连接起来：

(1) 7, 10;　(2) $+6\frac{2}{3}$, $+6\frac{3}{4}$;　(3) 7, -3;

(4) -3, -8;　(5) $-3\frac{1}{3}$, $-3\frac{1}{4}$;　(6) 0, -7.

[解法举例：(1) $7<10$.]

5. 比较下列各组数的大小，用关系符号“$>$”连接起来：

(1) 3.7, $+3\frac{5}{8}$;　(2) -3, 0;　(3) 165, -200;

(4) $-\frac{12}{7}$, $-1\frac{3}{4}$;　(5) 3.1, -3.1;　(6) -3.1, -3.2.

6. 比较下列各组数的大小：

(1) 0, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ （用关系符号$<$连接起来）;

(2) $1\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{4}$, $-3\frac{1}{4}$ （用关系符号>连接起来）.

7. 比较下列各题中两个数的大小：

(1) $+5$, $|-6|$;　(2) $|+5|$, $|-7|$;　(3) $|-7|$, $|-2|$;

(4) $-|+5|$, $-|-7|$;　(5) $-(-6)$, $-|-6|$.

8. 写出绝对值大于4的三个正数和三个负数；写出绝对值小于3的三个正数和三个负数.

9. 写出绝对值等于2的一个正数和一个负数.

10. 在数轴上指出绝对值等于5的数，这样的数有几个？

11. 写出绝对值小于4的所有整数，这样的数里有几组是相反的数？

12. 写出绝对值大于4而小于8的所有整数.

§1·8 有理数的加法

在算术里我们学过整数、分数和小数的加法、减法、乘法和除法. 应用这四种运算，可以解决许多实际问题. 现在我们已经学习了有理数，要应用它来解决更多的实际问题，就需要学会怎样进行有理数的运算.

这一节里，我们先来研究有理数的加法. 让我们来看下面的一些问题.

1. 符号相同的两个有理数相加

问题1. 在一条东西方向的公路上，一个人从甲地出发先向东走4公里，以后又向东走3公里. 结果这个人离开甲地几公里？它的位置在甲地的哪一边？

【解】 我们可以从下面的图上直接看出，这个人现在在甲地东边7公里.

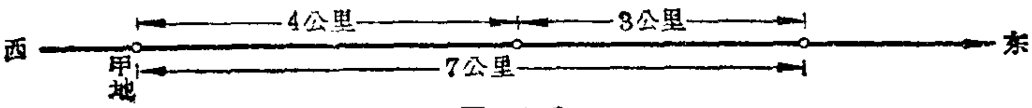


图 1·9

从算术里我们已经知道，这个问题可以用加法来算. 但是为了在算式里能够把方向也表示出来，我们取向东的方向作为正方向，那末只要把向东4公里记做 $+4$ 公里，向东3公里记做 $+3$ 公里，东边7公里记做 $+7$ 公里，这个题目的解答就可以列成算式：

$$(+4)+(+3)=+7.$$

答：在甲地东边7公里.

问题2. 如果在上题中，这个人先向西走4公里，再向西走3公里，结果这个人离开甲地几公里？在甲地的哪一边？

【解】 从下图可以看到，他现在在甲地西边7公里.

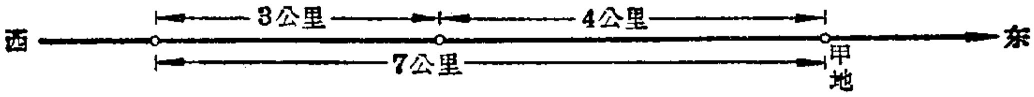


图 1·10

我们仍旧把向东的方向作为正方向，那末向西4公里记做 -4 公里，向西3公里记做 -3 公里，西边7公里记做 -7 公里. 因为这个题目的性质和问题1是相同的（只是走的方向不同），仍旧应该用加法来算. 这样就要把这个人走了两次以后离开原地的公里数和方向用

$$(-4)+(-3)$$

来表示，并且得到算式

$$(-4)+(-3)=-7.$$

答：在甲地西边7公里.

从上面的两个问题的解答中，我们看到：两个正数相加，它们的和还是一个正数，和的绝对值就是这两个加数的绝对值的和；两个负数相加，它们的和仍旧是个负数，和的绝对值是两个加数的绝对值的和.

2. 符号相反的两个有理数相加

问题 3. 在问题 1 中，如果这个人先向东走 4 公里，后来又向西走 3 公里，那末结果他离开甲地几公里？在甲地哪一边？

【解】 从下图中可以看到他应该在甲地东边 1 公里.

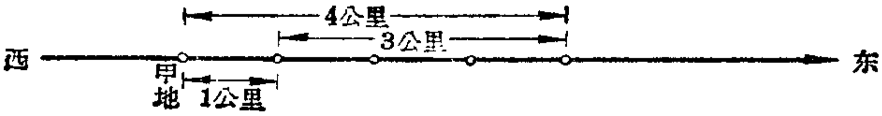


图 1·11

我们仍旧把向东的方向作为正方向，那末向东 4 公里记做 +4 公里，向西 3 公里记做 −3 公里，东边 1 公里记做 +1 公里.

因为这个题目的性质还是和问题 1 相同的（只是两次走的方向不同），我们仍旧可以用加法来做. 这样就要把他最后离开原地的公里数和方向，用

$$(+4)+(-3)$$

来表示，并且得到算式

$$(+4)+(-3)=+1.$$

答：在东边 1 公里.

问题 4. 如果这个人先向西走 4 公里，再向东走 3 公里，结果他离开甲地几公里？在甲地哪一边？

【解】 从下图可以看到，他在甲地西边 1 公里.

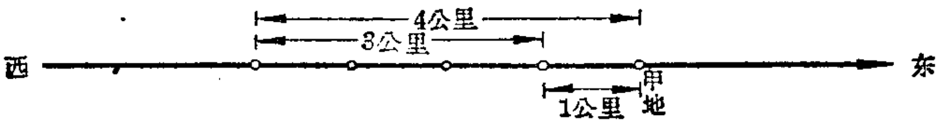


图 1·12

我们仍旧把向东的方向作为正方向，那末向西 4 公里只要记做 −4 公里，向东 3 公里只要记做 +3 公里，西边 1 公里只要记做 −1 公里.

这个问题的性质还是和问题1相同，所以我们仍旧用加法．把这个人最后离甲地的公里数和方向用

$$(-4)+(+3)$$

来表示，并且得到算式

$$(-4)+(+3)=-1.$$

答：在西边1公里．

问题5．如果这个人先向东走4公里，再向西走4公里，结果他离甲地几公里？在哪一边？

【解】 很明显，他仍在原地，就是离开原地0公里．

象上面的问题3和问题4一样，我们可以用

$$(+4)+(-4)$$

来表示他最后离开原地的公里数和方向，并且得到算式

$$(+4)+(-4)=0.$$

从上面的三个问题的解答中，可以看到，符号相反的两个数相加，它们的和的符号与加数里绝对值大的这个数的符号相同，和的绝对值应该等于加数的绝对值的差；如果这两个数是相反的数，那末和就是0．

3．关于零的加法 在算术里，我们已经知道一个数和零相加，结果仍旧等于这个数．例如

$$3+0=3,\quad 0+3=3,\quad 0+0=0.$$

对于加数中有负数的时候，这个性质还是一样的．例如

$$(-4)+0=-4,\quad 0+(-4)=-4.$$

读者可以自己用上面的问题来解释这两个式子的实际意义．

4．有理数加法法则 把上面这些情况归纳起来，我们就可以得到**有理数的加法法则**：

（i）正负符号相同的两个数的和，它的符号与这两个数的符号相同，它的绝对值等于这两个数的绝对值的和．

（ii）正负符号相反的两个数的和，它的符号与绝对值较大的加数的符号相同，它的绝对值等于这两个数的绝对值的差.（特殊情况：两个相反的数的和等于零.）

（iii）零同任何一个数的和，就等于这个数.（特殊情况：零加零等于零.）

例 1. 计算：

(1) $(+15)+(+24)$；

(2) $(+5.36)+(+2.73)$；

(3) $(-16)+(-31)$；

(4) $\left(-2\frac{1}{3}\right)+\left(-5\frac{1}{2}\right)$.

【解】

(1) $(+15)+(+24)=+39$；

(2) $(+5.36)+(+2.73)=+8.09$；

(3) $(-16)+(-31)=-47$；

(4) $\left(-2\frac{1}{3}\right)+\left(-5\frac{1}{2}\right)=-\left(2\frac{1}{3}+5\frac{1}{2}\right)=-7\frac{5}{6}$.

说明 这里都是两个符号相同的数的加法，只要把它们的绝对值相加，再写上相同的性质符号就是了.

注意 正数的性质符号，可以省略，如$(+15)+(+24)=+39$，可以写成 $15+24=39$.

例 2. 计算下列加法：

(1) $(+3.5)+(-7.2)$；

(2) $(+364)+(-120)$；

(3) $\left(-3\frac{2}{3}\right)+\left(+2\frac{1}{2}\right)$；

(4) $(-5.74)+(+5.74)$.

【解】

(1) $(+3.5)+(-7.2)=-3.7$;

(2) $(+364)+(-120)=+244$;

(3) $\left(-3\frac{2}{3}\right)+\left(+2\frac{1}{2}\right)=-1\frac{1}{6}$;

(4) $(-5.74)+(+5.74)=0$.

说明　这里都是两个符号不同的数的加法，要把它们的绝对值相减，求出绝对值的差，再写上绝对值较大的那个加数的符号。

注意　正数的性质符号，可以省略．例如$(+3.5)+(-7.2)$可以写成$3.5+(-7.2)$；$\left(-3\frac{2}{3}\right)+\left(+2\frac{1}{2}\right)$可以写成$\left(-3\frac{2}{3}\right)+2\frac{1}{2}$，或者写成$-3\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}$.

例3．计算：

(1) $(+245)+0$;　　　　(2) $0+\left(-3\frac{1}{3}\right)$;

(3) $0+(+5.32)$;　　　　(4) $0+0$.

【解】

(1) $(+245)+0=+245$;

(2) $0+\left(-3\frac{1}{3}\right)=-3\frac{1}{3}$;

(3) $0+5.32=5.32$;

(4) $0+0=0$.

说明　这里加数里都有0，和就等于另一个加数.

例4．计算：

(1) $(+15)+(-16)+(-8)+(+9)$;

(2) $\left(-3\frac{3}{5}\right)+(-2.7)+(+5.4)+\left(-7\frac{1}{5}\right)$.

【解】 依从左到右顺次计算：

(1) $(+15)+(-16)+(-8)+(+9)$

$=(-1)+(-8)+(+9)=(-9)+(+9)=0$;

(2) $\left(-3\frac{3}{5}\right)+(-2.7)+(+5.4)+\left(-7\frac{1}{5}\right)$

$=(-3.6)+(-2.7)+(+5.4)+(-7.2)$

$=(-6.3)+(+5.4)+(-7.2)$

$=(-0.9)+(-7.2)=-8.1.$

习 题 1·8

1. 回答下列问题：在算术里，两个数的和会小于任意一个加数吗？在代数里呢？举一个例子.

2. 做下列加法：

(1) $(+172)+(+288)$；

(2) $(-31)+(-72)$；

(3) $(-103)+(-207)$；

(4) $(+15)+(-11)$；

(5) $(+284)+(-316)$；

(6) $(-72)+(+28)$；

(7) $(-123)+(+319)$；

(8) $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)$；

(9) $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)$；

(10) $\left(-3\frac{1}{3}\right)+\left(-5\frac{3}{5}\right)$；

(11) $\left(+8\frac{1}{3}\right)+\left(-4\frac{2}{3}\right)$；

(12) $\left(+5\frac{1}{4}\right)+\left(-7\frac{1}{3}\right)$；

(13) $\left(-16\frac{5}{12}\right)+\left(+12\frac{7}{12}\right)$；

(14) $\left(-3\frac{1}{7}\right)+\left(+5\frac{1}{5}\right)$；

(15) $(+8.63)+(+0.7)$；

(16) $(-12.43)+(-34.507)$；

(17) $(+8.63)+(-6.234)$；

(18) $(-32.8)+(+51.76)$；

(19) $\left(+3\frac{1}{3}\right)+(+0.3)$；

(20) $\left(-5\frac{2}{3}\right)+(-2.71)$.

3. 计算：

(1) $(+3)+(+5)+(-7)+(-4)+(-3)+(+6)$；

(2) $(+12)+(-18)+(-23)+(+51)+(-7)+(+4)$；

(3) $(-35)+(-6)+(-7)+(+8)+(+9)+(+14)+(+17)$；

(4) $\left(+6\frac{1}{4}\right)+\left(-6\frac{1}{4}\right)+(-3.3)+(+3.3)+(+6)+(-6)$.

§1·9 加法的运算性质

1. 加法交换律 让我们先看一个问题：一个人在一条东西向的公路上第一天向东行 50 公里，第二天向西行 30 公里，他所到达的地方，与第一天先向西行 30 公里，而后在第二天再向东行 50 公里所到达的地方，结果是否相同？

如果我们把向东的方向作为正方向，那末：

在第一种情况下

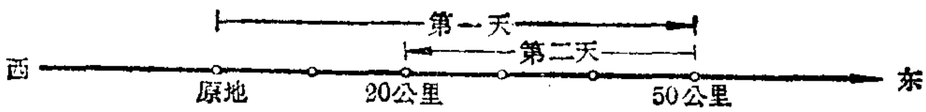


图 1·13

得算式

$$(+50)+(-30)=+20;$$

在第二种情况下

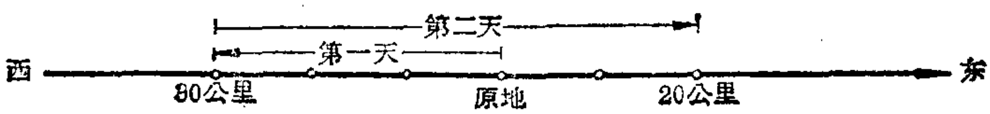


图 1·14

得算式

$$(-30)+(+50)=+20.$$

两种情况的结果是相同的，他所到达的地方都是在原地东边 20 公里. 可见

$$(+50)+(-30)=(-30)+(+50).$$

同样地，$(-3.54)+(-6.27)=-9.81,$

$$(-6.27)+(-3.54)=-9.81;$$

$\therefore\quad (-3.54)+(-6.27)=(-6.27)+(-3.54).$

在算术里，我们曾经学过：加法中任意两个加数，交换它们的位置，它们的和不变，这叫做**加法交换律**．这个性质对于有理数的加法，也是适用的．

2．加法结合律 让我们再看：

(1) $(3+5)+7=8+7=15,$

$3+(5+7)=3+12=15,$

$\therefore\quad (3+5)+7=3+(5+7);$

(2) $[(-3)+(+5)]+(-12)=(+2)+(-12)=-10,$

$(-3)+[(+5)+(-12)]=(-3)+(-7)=-10,$

$$\therefore\quad [(-3)+(+5)]+(-12)=(-3)+[(+5)+(-12)].$$

这样的性质，在加法里，对于任意三个加数都是成立的．这种性质叫做**加法结合律**，那就是：如果有三个加数，先把前面两个加数相加，再加上第三个加数，与先把后面两个加数相加，再和第一个加数相加，结果相同．

例 1． 计算：$3764+2985+6236.$

【解 1】 依照从左到右的次序演算：

$$3764+2985+6236=6749+6236=12985.$$

【解 2】 应用加法交换律交换第二个与第三个加数的位置：

$$\begin{aligned}3764+2985+6236&=3764+6236+2985\\&=10000+2985\\&=12985.\end{aligned}$$

显然，第二种解法因为凑成了一个比较整齐的数 10000，就比第一种解法简便些．

例 2. 计算:

$$\left(+6\frac{3}{5}\right)+\left(-5\frac{2}{3}\right)+\left(+4\frac{2}{5}\right)+\left(+2\frac{1}{7}\right)$$
$$+\left(-1\frac{1}{3}\right)+\left(-1\frac{1}{7}\right).$$

【解】 应用加法交换律和加法结合律，把分母相同的数先合并起来:

$$\begin{aligned}&\left(+6\frac{3}{5}\right)+\left(-5\frac{2}{3}\right)+\left(+4\frac{2}{5}\right)+\left(+2\frac{1}{7}\right)\\&\quad+\left(-1\frac{1}{3}\right)+\left(-1\frac{1}{7}\right)\\&=\left(+6\frac{3}{5}\right)+\left(+4\frac{2}{5}\right)+\left(-5\frac{2}{3}\right)+\left(-1\frac{1}{3}\right)\\&\quad+\left(+2\frac{1}{7}\right)+\left(-1\frac{1}{7}\right)\\&=\left[\left(+6\frac{3}{5}\right)+\left(+4\frac{2}{5}\right)\right]+\left[\left(-5\frac{2}{3}\right)+\left(-1\frac{1}{3}\right)\right]\\&\quad+\left[\left(+2\frac{1}{7}\right)+\left(-1\frac{1}{7}\right)\right]\\&=(+11)+(-7)+(+1)=(+4)+(+1)=5.\end{aligned}$$

例 3. 计算:

$$(+32)+(-18)+(+164)+(-32)+(-164).$$

【解】 应用加法交换律与加法结合律，先把相反的数合并成零:

$$\begin{aligned}&(+32)+(-18)+(+164)+(-32)+(-164)\\&=(+32)+(-32)+(-18)+(+164)+(-164)\\&=0+(-18)+0=-18.\end{aligned}$$

例 4. 计算:

$$(+32)+(-17)+(+157)+(-243)+(+24)+(-7).$$

【解】 应用加法交换律和加法结合律，先把符号相同的数合并起来:

$$
\begin{aligned}
&(+32)+(-17)+(+157)+(-243)+(+24)+(-7)\\
&=(+32)+(+157)+(+24)+(-17)\\
&\quad+(-243)+(-7)\\
&=(+213)+(-267)=-54.
\end{aligned}
$$

从上面这些例子可以看出，做有理数加法的时候，在下列情况下，一般可以应用加法交换律和加法结合律，使计算变得简便:

(1) 有些加数相加后可以得到比较整齐的整数时，可先行相加;

(2) 分母相同或易于通分的分数，可以先行相加;

(3) 有相反的数可以互相消去得零的，可以先行相加;

(4) 许多正数和许多负数相加时，可以先把符号相同的数相加，即正数与正数相加，负数与负数相加，最后再把一个正数与一个负数相加.

习　题　1·9

计算:

1. $(+132)+(-124)+(-16)+0+(-132)+(+16)$.
2. $(+127)+(+13)+(-300)+(-140)+(-189)+(+300)$.
3. $(+127)+(-373)+(+233)+(-125)+(-12)+(+540)$.
4. $(+6)+(-12)+(+8.3)+(-7.4)+(+9.1)+(-2.5)$.
5. $\left(+3\frac{5}{6}\right)+\left(+5\frac{1}{7}\right)+\left(-2\frac{1}{6}\right)+\left(+32\frac{6}{7}\right)$.
6. $\left(+7\frac{3}{4}\right)+\left(-5\frac{4}{11}\right)+\left(-3\frac{1}{4}\right)+\left(-6\frac{5}{11}\right)$
$+\left(+17\frac{1}{4}\right)+\left(+1\frac{1}{4}\right)$.

7. $(+3.543)+(-0.543)+(+6.457)+(-0.417)$.

8. $\left(+3\frac{2}{5}\right)+\left(-2\frac{7}{8}\right)+\left(-3\frac{5}{12}\right)+\left(+5\frac{3}{5}\right)+\left(-1\frac{1}{8}\right)+\left(+5\frac{5}{12}\right)$.

§1·10 有理数的减法

在算术里，我们已经知道，减法是加法的逆运算．减法，就是已知两个加数的和与其中的一个加数，求另一个加数的运算．这个已知的和在减法里就是被减数，已知的一个加数就是减法里的减数，减法所求得的另一个加数就叫做差．有理数减法的意义还是一样的．

例如，在有理数加法中，我们知道

$$(-4)+(+3)=-1, \tag{1}$$

写成减法，就是

$$(-1)-(+3)=-4, \tag{2}$$

以及

$$(-1)-(-4)=+3. \tag{3}$$

现在我们来研究，怎样做有理数的减法．首先我们考虑下面的问题：

-1 加上什么数，结果是 -4？是 $+3$？

根据有理数的加法法则，很容易得到

$$(-1)+(-3)=-4, \tag{4}$$

$$(-1)+(+4)=+3. \tag{5}$$

现在来比较上面的(2)和(4)．容易看到，$(-1)-(+3)$ 的结果和 $(-1)+(-3)$ 的结果是一样的．就是

$$(-1)-(+3)=(-1)+(-3).$$

这告诉我们：一个数减去一个正数，就只要加上它的相

反的数(负数).

同样地,比较(3)和(5),可以得到

$$(-1)-(-4)=(-1)+(+4).$$

这告诉我们:一个数减去一个负数,就只要加上它的相反的数(正数).

这样,我们就把有理数减法的问题,变做了有理数加法的问题来处理了.

一般地,我们有下面的**有理数的减法法则**:减去一个数,等于加上这个数的相反的数.

注 在算术里,我们知道做减法的时候,被减数不能小于减数.但是有了有理数,因为有理数的加法总是可以进行的,所以有理数的减法,不管被减数和减数有怎样的关系,它总是可以进行的.例如

$$(+3)-(+4)=(+3)+(-4)=-1.$$

例1. 计算:

(1) $(+16)-(+12)$; (2) $(+12)-(+16)$;

(3) $(-12)-(+14)$; (4) $(+10)-(-15)$;

(5) $(-16)-(-20)$; (6) $(-16)-(-16)$;

(7) $0-(+5)$; (8) $(-5)-0$.

【解】

(1) $(+16)-(+12)=(+16)+(-12)=+4$;

(2) $(+12)-(+16)=(+12)+(-16)=-4$;

(3) $(-12)-(+14)=(-12)+(-14)=-26$;

(4) $(+10)-(-15)=(+10)+(+15)=+25$;

(5) $(-16)-(-20)=(-16)+(+20)=+4$;

(6) $(-16)-(-16)=(-16)+(+16)=0$;

(7) $0-(+5)=0+(-5)=-5$;

(8) $(-5)-0=(-5)+0=-5$ 或 $(-5)-0=-5$.

例 2. 计算:

(1) $(-3)-(-6)-(-8)$;

(2) $(-5)-(+7)+(-9)$;

(3) $(+7)+(-12)-(+9)$;

(4) $(-3)-(-5)-(-7)+(-9)$.

【解】

(1) $(-3)-(-6)-(-8)$

$=(-3)+(+6)+(+8)=+11$;

(2) $(-5)-(+7)+(-9)$

$=(-5)+(-7)+(-9)=-21$;

(3) $(+7)+(-12)-(+9)$

$=(+7)+(-12)+(-9)=-14$;

(4) $(-3)-(-5)-(-7)+(-9)$

$=(-3)+(+5)+(+7)+(-9)$

$=(-12)+(+12)=0$.

例 3. 计算:

(1) $\left(-3\frac{2}{3}\right)-\left(-5\frac{1}{2}\right)$;

(2) $(-5.46)-\left(+5\frac{1}{3}\right)$;

(3) $(-2.4)-(+3.65)+\left(-1\frac{1}{4}\right)$;

(4) $(+1.7)-\left(-3\frac{1}{3}\right)+\left(-2\frac{2}{5}\right)$.

【解】

(1) $\left(-3\frac{2}{3}\right)-\left(-5\frac{1}{2}\right)=\left(-3\frac{2}{3}\right)+\left(+5\frac{1}{2}\right)$

$=+1\frac{5}{6}$;

(2) $(-5.46)-\left(+5\frac{1}{3}\right)=\left(-5\frac{46}{100}\right)-\left(+5\frac{1}{3}\right)$

$=\left(-5\frac{23}{50}\right)+\left(-5\frac{1}{3}\right)$

$=-10\frac{119}{150};$

(3) $(-2.4)-(+3.65)+\left(-1\frac{1}{4}\right)$

$=(-2.4)+(-3.65)+(-1.25)=-7.3;$

(4) $(+1.7)-\left(-3\frac{1}{3}\right)+\left(-2\frac{2}{5}\right)$

$=\left(+1\frac{7}{10}\right)+\left(+3\frac{1}{3}\right)+\left(-2\frac{2}{5}\right)=2\frac{19}{30}.$

习　题　1·10

1．回答下列问题：

(1) 在算术里，减法是不是总可以进行？在代数里呢？

(2) 在算术里，两个数的差会大于被减数吗？在代数里呢？举一个例子．

2．计算：

(1) $(+6)-(+11)$；　(2) $(-6)-(+11)$；

(3) $(+13)-(-11)$；　(4) $(-13)-(-11)$；

(5) $(-13)-(-23)$；　(6) $(-13)-(-13)$；

(7) $(+5)-\left(-3\frac{1}{2}\right)$；　(8) $\left(-2\frac{3}{4}\right)-\left(+1\frac{1}{2}\right)$；

(9) $(-1.24)-(+5.73)$；　(10) $(-1.12)-\left(-3\frac{1}{3}\right)$；

(11) $\left(+3\frac{3}{5}\right)-\left(+6\frac{2}{7}\right)$；　(12) $\left(-11\frac{1}{3}\right)-\left(-7\frac{2}{5}\right)$；

(13) $(+12)+(-16)-(+7)$；　(14) $(-12)-(+8)+(-13)$；

(15) $(-6)-(+6)-(-7)$；

(16) $(-1)+(-1.2)-(+3.5)$；

(17) $\left(+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)$;

(18) $\left(-3\frac{1}{2}\right)+\left(+5\frac{1}{3}\right)-\left(+7\frac{1}{5}\right)$;

(19) $\left(+2\frac{3}{4}\right)-\left(-1\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{3}{8}\right)-\left(+4\frac{2}{3}\right)$;

(20) $(+6)-[(-3)+(-7)]-[(-1)+(-5)-(-8)]$.

§1·11 减法的运算性质

让我们先看一些例子:

问题1. 某生产队要播种水稻63亩，第一天播种了25亩3分，第二天又播种了26亩2分，还有几亩几分要在第三天播种?

【解1】 先计算两天中已播种的亩分数，再从总的计划播种数里减去，得算式:

$$63-(25.3+26.2)=63-51.5=11.5(\text{亩}).$$

答: 第三天还要播种11亩5分.

【解2】 从总的计划播种数里先减去第一天的播种数，再减去第二天的播种数，得算式:

$$63-25.3-26.2=37.7-26.2=11.5(\text{亩}).$$

答: 第三天还要播种11亩5分.

两种结果是相同的.

从两种解法中，我们可以得出一个减法的运算性质: 从一个数减去两个数的和，与从这个数连续减去这两个数的结果是一样的. 这个性质对于有理数的减法也是适用的. 例如:

问题2. 计算: $(-36)-[(-54)+(+32)]$.

【解 1】 先求括号内的两数和，再做减法：

$$
\begin{aligned}
(-36)-[(-54)+(+32)] &= (-36)-(-22)\\
&= (-36)+(+22)\\
&= -14.
\end{aligned}
$$

【解 2】 从被减数连续减去括号内的两个加数：

$$
\begin{aligned}
&(-36)-[(-54)+(+32)]\\
&= (-36)-(-54)-(+32)\\
&= (-36)+(+54)+(-32)\\
&= (+18)+(-32)\\
&= -14.
\end{aligned}
$$

两种解法的结果是相同的.

减法的运算性质：从一个数减去几个数的和，等于从这个数连续减去各个加数.

例 1. 计算：$364-[364+(-500)]$.

【解】 应用减法的运算性质，

$$
\begin{aligned}
364-[364+(-500)] &= 364-364-(-500)\\
&= 0-(-500) = +500.
\end{aligned}
$$

例 2. 计算：

$$\left(-15\frac{2}{3}\right)-\left[\left(-13\frac{2}{3}\right)+\left(-31\frac{2}{15}\right)+(+14)\right].$$

【解】

$$
\begin{aligned}
&\left(-15\frac{2}{3}\right)-\left[\left(-13\frac{2}{3}\right)+\left(-31\frac{2}{15}\right)+(+14)\right]\\
&= \left(-15\frac{2}{3}\right)-\left(-13\frac{2}{3}\right)-\left(-31\frac{2}{15}\right)-(+14)\\
&= (-2)-\left(-31\frac{2}{15}\right)-(+14)\\
&= \left(+29\frac{2}{15}\right)-(+14) = 15\frac{2}{15}.
\end{aligned}
$$

例 3. 计算:

$$(-16)-\left[\left(-5\frac{1}{3}\right)+\left(-3\frac{2}{3}\right)+\left(3\frac{1}{7}\right)+\left(-2\frac{1}{7}\right)\right].$$

【解】

$$\begin{aligned}&(-16)-\left[\left(-5\frac{1}{3}\right)+\left(-3\frac{2}{3}\right)+\left(+3\frac{1}{7}\right)+\left(-2\frac{1}{7}\right)\right]\\&=(-16)-[-9+1]\\&=(-16)-(-8)\\&=-8.\end{aligned}$$

说明　例 1 与例 2, 应用减法运算性质, 计算比较简便. 但在例 3 里,把括号内四个加数,应用加法结合律, 先合并分母相同的数, 就比较简便,不必应用减法运算性质.

习　题　1·11

用较简便的方法,计算:

1. $\left(-3\frac{1}{4}\right)-\left[\left(-3\frac{1}{4}\right)+\left(+5\frac{1}{3}\right)\right]$.
2. $(+163)-[(+63)+(-259)+(-41)]$.
3. $\left(-12\frac{1}{3}\right)-\left[\left(+10\frac{2}{3}\right)+\left(-8\frac{1}{5}\right)+\left(+3\frac{2}{7}\right)\right]$.
4. $(+3.74)-[(+2.74)+(-5.91)+(-2.78)]$.
5. $(+3.3)-\left[(-3.3)+(-3.4)+\left(+10\frac{1}{3}\right)\right]$.
6. $(-3.635)-[(-2.635)+(-1.456)+(+3.456)]$.
7. $(-3.635)-[(+3.635)+(-1.635)+(-2)]$.
8. $\left(-32\frac{1}{3}\right)-\left[\left(+5\frac{1}{4}\right)+\left(-3\frac{1}{7}\right)+\left(-5\frac{1}{4}\right)+\left(-2\frac{6}{7}\right)\right]$.

§1·12 代 数 和

看下面的算式:

$$(-5)-\left(-3\frac{1}{2}\right)+(-7)-\left(+2\frac{1}{3}\right).$$

这个式子里,有加法,也有减法.

因为减去一个数,就等于加上它的相反的数,所以这个算式里的减法可以转变为加法,即

$$\begin{aligned}&(-5)-\left(-3\frac{1}{2}\right)+(-7)-\left(+2\frac{1}{3}\right)\\&=(-5)+\left(+3\frac{1}{2}\right)+(-7)+\left(-2\frac{1}{3}\right).\end{aligned}$$

这样,所有的数都是加数了. 那就是说,代数里的加法和减法都可以统一起来变成加法,其中加数或者是正数,或者是负数, 或者是0. 我们把这样的形式叫做这几个加数的代数和.

表示几个正数、负数或者零相加的式子叫做这几个数的代数和.

例如$(+1)+(+3)+(-5)+(-11)$, 就叫做 $+1$, $+3$, -5 及 -11 四个数的代数和.

在一个代数和的式子里,因为所有的运算都是加法,所以运算符号可以省略不写,例如$(+1)+(+3)+(-5)+(-11)$,可以写做$1+3-5-11$.

注 $1+3-5-11$; 可以读做1加3减5再减11, 也可以读做 $+1$, $+3$, -5, -11 的代数和,所以这里 $+3$, -5 与 -11 的符号$+$, $-$, $-$等可以当做运算符号, 也可以当做性质符号. 这就是说, 运算符号与性质符号是既有区别又有联系,有时可以互相转化的.

例 计算:

$$-5+7-12+136-88-4\frac{1}{3}-5\frac{1}{2}+7\frac{1}{3}-10.3.$$

【解】

$$\begin{aligned}
&-5+7-12+136-88-4\frac{1}{3}-5\frac{1}{2}+7\frac{1}{3}-10.3\\
&=7+136-5-12-88-4\frac{1}{3}+7\frac{1}{3}-5.5-10.3\\
&=143-105+3-15.8\\
&=146-120.8\\
&=25.2.
\end{aligned}$$

说明 我们把这一式子当作代数和，应用加法交换律和结合律把易于合并的先合并起来.

习 题 1·12

用简便的方法计算:

1. $-12+11-8+39$.
2. $+45-9-91+5$.
3. $-5-5-3-3$.
4. $-5.4+0.2-0.6+0.8$.
5. $\left(-2\frac{1}{2}\right)+\left[\left(+\frac{5}{6}\right)+(-0.5)+\left(+1\frac{1}{6}\right)\right]$.
6. $(+4.4)+\left[(-0.1)+\left(+8\frac{1}{3}\right)+\left(+11\frac{2}{3}\right)\right]$.
7. $-6-8-2+3.54-4.72+16.46-5.28$.
8. $\frac{12}{25}+\frac{4}{15}-\frac{7}{30}$.
9. $0.12-0.54-\frac{3}{20}$.
10. $-5\frac{6}{25}-14.3-8.14$.

§1·13　有理数的乘法

1．两个有理数的乘法　我们来看下面的问题：

问题 1． 一列火车在东西方向的铁路上行驶，速度是每小时 40 公里．如果中午的时候恰巧经过甲车站．问在与中午相距 3 小时的时候，它离开甲车站多少公里？

我们知道，这个问题可以用乘法来解决，就是：

$$速度\times时间=路程.$$

【解】
$$40\times3=120. \tag{1}$$

答：离开甲车站 120 公里．

在这个问题里，没有指出火车究竟是向哪一个方向行驶，也没有指出这个时间究竟是在中午以前还是中午以后，所以我们计算出来的结果，也只能知道火车离开甲车站的公里数，而还不知道火车究竟在甲车站的东边还是西边．

如果要确切地知道火车在所问的时间究竟在哪里，那末就需要知道火车行驶的方向，是向东还是向西，所问的时间是在中午以前还是在中午以后．在这种情况下，我们就需要用有理数的乘法来解决这个问题．

我们规定从西到东的方向作为正方向．那末火车从西到东行驶的速度就可以用正数来表示，从东到西行驶的速度，用负数来表示．

例如：每小时向东行驶 40 公里，记做每小时 $+40$ 公里，
　　　每小时向西行驶 40 公里，记做每小时 -40 公里．

火车在甲车站东边时，这段路程可以用正数来表示，在西边时，这段路程就用负数来表示．

例如：在东边 120 公里，记做 $+120$ 公里，

在西边 120 公里，记做 -120 公里.

对于时间来说，我们也可以作这样的规定，以中午时间为标准，午后的时间用正数来表示，午前的时间用负数来表示.

例如：午前 3 小时，记做 -3 小时，

午后 3 小时，记做 $+3$ 小时.

现在，我们来研究问题 1 里的各种可能情况：

问题 2. 火车以每小时 40 公里的速度从西向东行驶，中午经过甲车站，问午后 3 小时，火车在甲车站的哪一边？离开甲车站几公里？

【解】 从下面的图可以看到，这时火车应该在甲车站的东边 120 公里.（就是离开甲车站 $+120$ 公里.）

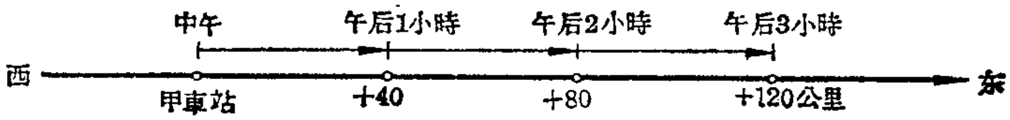


图 1·15

这里速度是每小时 $+40$ 公里，时间是 $+3$ 小时.

$\therefore$ 速度×时间是 $(+40)\times(+3)$ 公里.

这段路程是 $+120$ 公里.

我们得到算式：

$$(+40)\times(+3)=+120. \tag{2}$$

答：在甲车站东边 120 公里.

问题 3. 火车以每小时 40 公里的速度，从东向西行驶，中午经过甲车站. 问午后 3 小时，火车在甲车站的哪一边？离开甲车站几公里？

【解】 从下图可以看到，这时火车应该在甲车站的西边 120 公里.（就是离开甲车站 -120 公里.）

这里速度是每小时 -40 公里，时间是 $+3$ 小时.

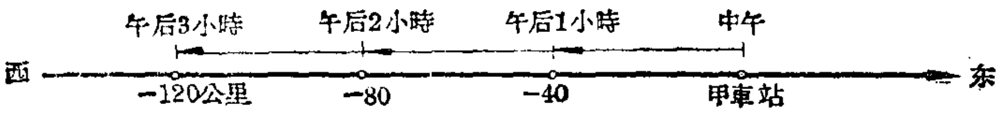


图 1·16

速度×时间是$(-40)\times(+3)$公里.

这段路程是 -120 公里.

我们得到算式:

$$(-40)\times(+3)=-120. \tag{3}$$

答: 火车在甲车站西边 120 公里.

问题 4. 火车以每小时 40 公里的速度，从西向东行驶，中午经过甲车站. 问午前 3 小时，火车在甲车站的哪一边? 离开甲车站几公里?

【解】 从下图可以看到,为了要火车在中午到达甲车站，午前 3 小时的时候火车应该在甲车站西边 120 公里. (就是离开甲车站 -120 公里.)

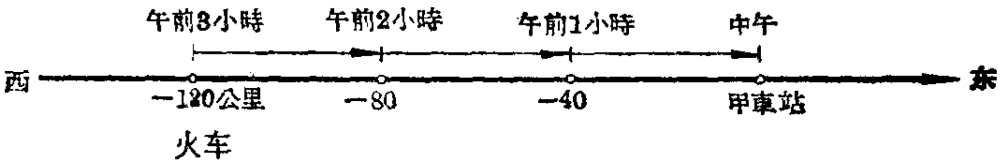


图 1·17

这里速度是每小时 $+40$ 公里,时间是 -3 小时.

速度×时间是$(+40)\times(-3)$公里.

这段路程就是 -120 公里.

我们得到算式:

$$(+40)\times(-3)=-120. \tag{4}$$

答: 火车在甲车站西边 120 公里.

问题 5. 火车以每小时 40 公里的速度，从东向西行驶，中午经过甲车站. 问午前 3 小时，火车在甲车站的哪一边?

离开甲车站几公里?

【解】 从下图可以看到,为了要火车在中午到达甲车站,在午前 3 小时的时候,火车应该在甲车站东边 120 公里.(就是离开甲车站 +120 公里.)

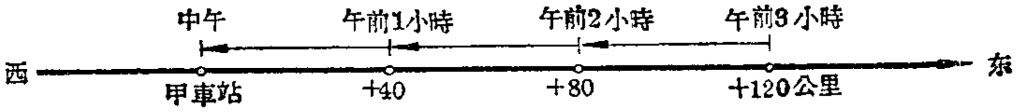


图 1·18

这里速度是每小时 -40 公里,时间是 -3 小时.

速度×时间是$(-40)\times(-3)$公里.

这段路程是 $+120$ 公里.

我们得到算式:

$$(-40)\times(-3)=+120. \tag{5}$$

答: 火车在甲车站东边 120 公里.

从上面问题 2～问题 5 的解答中,可以发现一个重要的事实. 在(2)和(5)里,我们做的是两个符号相同的有理数的乘法,我们看到:

符号相同的两个有理数相乘,它们的积应该是一个正数,积的绝对值就是两个因数的绝对值的积.

在(3)和(4)里,我们做的是符号相反的两个有理数的乘法,我们看到:

符号相反的两个有理数相乘,它们的积应该是一个负数,积的绝对值等于两个因数的绝对值的积.

很明显的,在上面的问题里,如果速度和时间中有一个是零,或者两个都是零,那末火车仍旧在甲车站. 也就是说,火车离开甲车站的距离是零. 这就说明了:

任何一个有理数和零相乘,积是零.

例如： $(+40)\times 0=0,\quad 0\times(+3)=0,$

$(-40)\times 0=0,\quad 0\times(-3)=0,$

$0\times 0=0.$

把上面这些情况综合起来，我们得到**有理数的乘法法则**：

（ⅰ）正负符号相同的两个数的积是一个正数，它的绝对值等于这两个数的绝对值的积；

（ⅱ）正负符号相反的两个数的积是一个负数，它的绝对值等于这两个数的绝对值的积；

（ⅲ）零同任何一个数的积总等于零.

为了便于记忆，我们把上面(ⅰ)、(ⅱ)两条法则，概括起来，得到决定积的符号的口诀：**同号相乘得正数，异号相乘得负数.**

例1. 计算：

(1) $(+12)\times(-16)$；　(2) $(-10)\times\left(+\frac{1}{2}\right)$；

(3) $(-3)\times(-0.3)$；　(4) $\left(-5\frac{1}{2}\right)\times\left(-3\frac{1}{3}\right)$；

(5) $(0)\times(-16)$；　(6) $(-3.5)\times\left(+1\frac{1}{3}\right)$.

【解】

(1) $(+12)\times(-16)=-192$;

(2) $(-10)\times\left(+\frac{1}{2}\right)=-5$;

(3) $(-3)\times(-0.3)=0.9$;

(4) $\left(-5\frac{1}{2}\right)\times\left(-3\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{11}{2}\right)\times\left(-\frac{10}{3}\right)$

$$=+\frac{55}{3}=18\frac{1}{3};$$

(5) $(0)\times(-16)=0$;

(6) $(-3.5)\times\left(+1\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{7}{2}\right)\times\left(+\frac{4}{3}\right)$

$$=-\frac{14}{3}=-4\frac{2}{3}.$$

习　题　1·13(1)

做下列乘法(1～12):

1. $(+5)\times(-8)$.
2. $(-5)\times(-7)$.
3. $(-12)\times(+17)$.
4. $(-8)\times\left(-\frac{3}{4}\right)$.
5. $\left(+3\frac{1}{2}\right)\times\left(-5\frac{1}{7}\right)$.
6. $(-0.4)\times(-0.2)$.
7. $(-3.125)\times(+8)$.
8. $(-0.1)\times(-0.1)$.
9. $(+3.732)\times 0$.
10. $0\times(-3)$.
11. $(-0.625)\times(+16)$.
12. $(-7.23)\times\left(+\frac{1}{3}\right)$.

计算(13～16):

13. $(-5)\times(-3)+(+7)\times(-2)$.
14. $\left(+\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-1\frac{1}{2}\right)\times\left(-1\frac{1}{3}\right)$.
15. $(3.54-5.28)\times(-2)$.
16. $\left(6\frac{1}{3}-8\frac{1}{4}\right)\times\left(+1\frac{1}{2}\right)$.

2. 三个或三个以上有理数的乘法

例 2. 计算:

(1) $(-3)\times(+5)\times(-2)$;

(2) $(-1)\times(-5)\times(+3)\times(-4)\times(+2)$.

【解】 依照由左向右的顺序进行:

(1) $(-3)\times(+5)\times(-2)=(-15)\times(-2)$

$$=+30;$$

(2) $(-1)\times(-5)\times(+3)\times(-4)\times(+2)$

$$=(+5)\times(+3)\times(-4)\times(+2)$$

$$=(+15)\times(-4)\times(+2)$$

$$=(-60)\times(+2)=-120.$$

注意 (1)里有两个负数,乘积是正数;(2)里有三个负数,乘积是负数.我们也可以先把各因数的绝对值相乘,再根据负号的个数是偶数或者奇数,确定积是正的或负的.

从上面的例子,我们可以看出:三个或者更多个有理数的乘法,可以由左向右逐一进行.但为了方便起见,我们也可以把三个或者更多个有理数的乘法,分为定性质符号与定绝对值两步,得到**三个或者更多个有理数的乘法法则**:

(i) 定正负符号:如果因数里的负号有偶数个(如两个、四个、六个……),那末所得的积是正数;如果因数里的负号有奇数个(如一个、三个、五个……),那末所得的积是负数.

(ii) 定绝对值:把各因数的绝对值相乘,所得的积就是积的绝对值.

例3. 计算:

(1) $(+2)\times(-1)\times(+3)\times(-10)\times(-4)\times(-5)$;

(2) $\left(+\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-5\frac{1}{3}\right)\times\left(-1\frac{1}{5}\right)$.

【解】 (1) 这里有四个负号,积是正的.

$\therefore\quad (+2)\times(-1)\times(+3)\times(-10)\times(-4)\times(-5)$

$$=+(2\times1\times3\times10\times4\times5)=1200;$$

(2) 这里有三个负号,积是负的.

$\therefore\quad \left(+\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-5\frac{1}{3}\right)\times\left(-1\frac{1}{5}\right)$

$$=-\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{16}{3}\times\frac{6}{5}\right)=-\frac{32}{15}=-2\frac{2}{15}.$$

习　题　1·13(2)

计算:

1. $(-4)\times(+96)\times(-25)$.
2. $(-6)\times(2.5)\times(-0.04)$.
3. $\left(-\frac{5}{6}\right)\times(+2.4)\times\left(+\frac{3}{5}\right)$.
4. $(+1.25)\times\left(-4\frac{1}{20}\right)\times(-8)$.
5. $(-8)\times(-4)\times(+25)\times(-125)$.
6. $(-3.2)\times(+2)\times\left(-1\frac{1}{2}\right)\times(-6)\times(-3.8)$.
7. $(-0.2)\times(-0.2)\times(-0.5)\times(-0.5)$.
8. $(-8)\times(-12)\times(-0.125)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-0.001)$.
9. $\left(-1\frac{1}{2}\right)\times\left(-1\frac{1}{3}\right)\times\left(-1\frac{1}{4}\right)\times\left(-1\frac{1}{5}\right)\times\left(-1\frac{1}{6}\right)\times\left(-1\frac{1}{7}\right)$.
10. $(-0.1)\times(-10)\times(-0.01)\times(-100)\times(-0.001)$ $\times(+10000)$.

§1·14　乘法的运算性质

1. 乘法交换律　在算术里，我们已经学习过乘法交换律，如

$$5\times8=8\times5,$$

就是，两个因数交换位置，乘积不变.

乘法交换律，对于有理数也是适用的，例如

$$(-8)\times(+6)=(+6)\times(-8)=-48;$$

$$(-3)\times(-4)=(-4)\times(-3)=+12;$$

$$0\times(-7)=(-7)\times0=0,$$

乘法交换律：两个数相乘，交换它们的相互位置，它们的积不变.

2．乘法结合律

我们来看下面的计算：

$$(3\times2)\times5=6\times5=30,$$
$$3\times(2\times5)=3\times10=30;$$
$$\therefore\quad (3\times2)\times5=3\times(2\times5).$$

对于有理数，同样地我们有

$$[(-3)\times(-5)]\times(+7)=(+15)\times(+7)=+105,$$
$$(-3)\times[(-5)\times(+7)]=(-3)\times(-35)=+105;$$
$$\therefore\quad [(-3)\times(-5)]\times(+7)=(-3)\times[(-5)\times(+7)].$$

这个性质，就是如下的**乘法结合律**：三个因数相乘，先把前面两个因数相乘，再乘以第三个因数；所得的结果与先把后面两个因数相乘再乘以第一个因数所得的结果是相等的．换句话说，因数可以任意结合.

3．乘法对于加法的分配律

我们来看下面的计算：

$$5\times(4+8)=5\times12=60,$$
$$5\times4+5\times8=20+40=60;$$
$$\therefore\quad 5\times(4+8)=5\times4+5\times8.$$

对于有理数，同样地我们有

$$(-3)\times[(-2)+(+5)+(-11)]=(-3)\times(-8)=+24,$$
$$(-3)\times(-2)+(-3)\times(+5)+(-3)\times(-11)$$
$$=(+6)+(-15)+(+33)=+24,$$
$$\therefore\quad (-3)\times[(-2)+(+5)+(-11)]$$
$$=(-3)\times(-2)+(-3)\times(+5)$$
$$+(-3)\times(-11).$$

这个性质，就是如下的乘法对于加法的分配律：一个数与几个数的和相乘所得的积，等于这个数与各个加数分别相乘所得的积的和.

例 1. 计算：$(+8)\times(+136)\times\left(+\frac{1}{8}\right)\times\left(-\frac{1}{68}\right)$.

分析 这里 $8\times\frac{1}{8}=1$，$136\times\frac{1}{68}=2$，所以可以应用乘法交换律与乘法结合律，使运算简便.

【解】 $(+8)\times(+136)\times\left(+\frac{1}{8}\right)\times\left(-\frac{1}{68}\right)$

$$=(+8)\times\left(+\frac{1}{8}\right)\times(+136)\times\left(-\frac{1}{68}\right)$$

$$=1\times(-2)=-2.$$

例 2. 计算：$(-105)\times\left[\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(+\frac{1}{7}\right)\right]$.

分析 这里三个加数分母不相同，通分较繁，可以应用乘法对于加法的分配律，先乘后加.

【解】 $(-105)\times\left[\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(+\frac{1}{7}\right)\right]$

$$=(-105)\times\left(-\frac{1}{3}\right)+(-105)\times\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$+(-105)\times\left(+\frac{1}{7}\right)$$

$$=(+35)+(+21)+(-15)=41.$$

例 3. 计算：$(-53)\times(-3.54)+(-53)\times(+4.54)$.

分析 这里乘法较繁，但在两个乘法里都有因数 -53，且 -3.54 与 4.54 的和是 1，很简单，可以反过来应用乘法对于加法的分配律，先加后乘.

【解】 $(-53)\times(-3.54)+(-53)\times(+4.54)$

$$=(-53)\times[-3.54+4.54]$$

$$=(-53)\times1=-53.$$

习 题 1·14

用简便的方法计算:

1. $125\times 3874\times 9\times 8\times \frac{1}{9}$.
2. $\left(-3\frac{1}{3}\right)\times(+246)\times\left(-\frac{3}{10}\right)\times\left(-\frac{1}{41}\right)$.
3. $(-354)\times(-3)+(-354)\times(+5)+(-354)\times(-2)$.
4. $(-66)\times\left[\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{5}{11}\right)\right]$.
5. $(+37)\times(-125)\times(+4)\times(-4)\times(-2)\times(+25)$.
6. $(+74)\times(-1280)+(+74)\times(+1140)+(+74)\times(+141)$.
7. $(-124)\times(+38)+(-124)\times(+51)+(-124)\times(+14)$
   $+(-76)\times(+96)+(-76)\times(+7)$.
8. $\left[\left(+\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{5}{12}\right)\right]\times(+60)$.

§1·15 有理数的除法

在算术里，我们已经知道，除法是乘法的逆运算，就是：已知两个因数的积与其中一个不等于零的因数，求另一个因数的运算．这个已知的积在除法里叫做被除数，已知的一个因数叫做除数，求得的结果就是另一个因数，在除法里叫做商．有理数除法的意义还是一样．象有理数的减法一样，我们可以从这个逆运算关系来研究有理数的除法法则．

从乘法

$$(+7)\times(+3)=+21,$$

依照逆运算关系，可得

$$(+21)\div(+3)=+7. \tag{1}$$

从乘法

$$(+7)\times(-3)=-21,$$

依照逆运算关系,可得

$$(-21)\div(-3)=+7. \tag{2}$$

从乘法

$$(-7)\times(+3)=-21,$$

依照逆运算关系,可得

$$(-21)\div(+3)=-7. \tag{3}$$

从乘法

$$(-7)\times(-3)=+21.$$

依照逆运算关系,可得

$$(+21)\div(-3)=-7. \tag{4}$$

从乘法

$$0\times(+3)=0,\ \text{及}\ 0\times(-3)=0,$$

依照逆运算关系,可得

$$0\div(+3)=0, \tag{5}$$

$$0\div(-3)=0. \tag{6}$$

从上面这些例子中,可以看出:

(1) 正数除以正数,商是正数;

(2) 负数除以负数,商也是正数;

(3) 负数除以正数,商是负数;

(4) 正数除以负数,商也是负数;

(5) 零除以正数,商是零;

(6) 零除以负数,商也是零.

至于商的绝对值,则在任何一个情况下,都等于被除数的绝对值除以除数的绝对值所得的商.

综合上面的结论,就得到**有理数除法法则**:

(i) 正负符号相同的两个数相除,商是一个正数,它的绝对值等于这两个数的绝对值的商;

（ii）正负符号相反的两个数相除，商是一个负数，它的绝对值等于这两个数的绝对值的商；

（iii）零除以一个不等于零的数，商是零.

为了便于记忆，我们把上面(i)、(ii)两条法则，概括起来，得到决定商的正负符号的口诀：**同号相除得正数，异号相除得负数.**

这里还必须注意：**零不能做除数，任何数除以零没有意义，零除以零也没有意义.** 在有理数范围内，和在算术里一样，我们仍旧作这样的规定.

例 1. 做下列除法：

(1) $(+48)\div(+6)$； (2) $(-48)\div(-6)$；

(3) $(-0.4)\div(+0.002)$； (4) $(+1)\div(-1)$；

(5) $\left(-3\frac{2}{3}\right)\div\left(-5\frac{1}{2}\right)$； (6) $(+3.3)\div\left(-3\frac{1}{3}\right)$；

(7) $\left(-2\frac{1}{2}\right)\div(-5)\times\left(-3\frac{1}{3}\right)$；

(8) $\left(-3\frac{1}{3}\right)\div\left(+2\frac{1}{3}\right)\div\left(+1\frac{1}{5}\right)$.

【解】

(1) $(+48)\div(+6)=+8$；

(2) $(-48)\div(-6)=+8$；

(3) $(-0.4)\div(+0.002)=-\frac{0.4}{0.002}=-\frac{400}{2}=-200$；

(4) $(+1)\div(-1)=-1$；

(5) $\left(-3\frac{2}{3}\right)\div\left(-5\frac{1}{2}\right)=+\left(\frac{11}{3}\div\frac{11}{2}\right)$

$$=\frac{11}{3}\times\frac{2}{11}=\frac{2}{3}；$$

(6) $(+3.3)\div\left(-3\frac{1}{3}\right)$

$$=\frac{33}{10}\div\left(-\frac{10}{3}\right)$$

$$=-\left(\frac{33}{10}\times\frac{3}{10}\right)=-\frac{99}{100};$$

(7) $\left(-2\frac{1}{2}\right)\div(-5)\times\left(-3\frac{1}{3}\right)$

$$=+\left(\frac{5}{2}\times\frac{1}{5}\right)\times\left(-3\frac{1}{3}\right)$$

$$=+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{10}{3}\right)$$

$$=-\frac{5}{3}=-1\frac{2}{3};$$

(8) $\left(-3\frac{1}{3}\right)\div\left(+2\frac{1}{3}\right)\div\left(+1\frac{1}{5}\right)$

$$=\left(-\frac{10}{3}\right)\times\left(+\frac{3}{7}\right)\times\left(+\frac{5}{6}\right)$$

$$=-\left(\frac{10}{3}\times\frac{3}{7}\times\frac{5}{6}\right)=-\frac{50}{42}$$

$$=-\frac{25}{21}=-1\frac{4}{21}.$$

例 2. 化简下列分数:

(1) $\frac{-3}{-5}$;　　(2) $-\frac{10}{-6}$;

(3) $-\frac{-12}{18}$;　　(4) $-\frac{-4}{-8}$.

【解】

(1) $\frac{-3}{-5}=\frac{3}{5}$;

(2) $-\frac{10}{-6}=-\left(-\frac{5}{3}\right)=+\frac{5}{3}$;

(3) $-\dfrac{-12}{18}=-\left(-\dfrac{2}{3}\right)=+\dfrac{2}{3}$;

(4) $-\dfrac{-4}{-8}=-\dfrac{1}{2}$.

从上例可以知道：一个分数有三个地方有性质符号：分子，分母与分数本身，如果三个地方有两个负号，这两个负号可以互相约掉。

习 题 1·15

计算：

1. $(-128)\div(-4)$.
2. $(+5)\div\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.
3. $(-6)\div(+10)$.
4. $\left(-\dfrac{2}{3}\right)\div\left(+\dfrac{5}{6}\right)$.
5. $(+14)\div(-0.4)$.
6. $(-0.02)\div(+0.1)$.
7. $0\div(-16)$.
8. $0\div\left(+\dfrac{1}{3}\right)$.
9. $\left(+5\dfrac{1}{3}\right)\div\left(-7\dfrac{1}{5}\right)$.
10. $\left(-3\dfrac{2}{3}\right)\div\left(+1\dfrac{2}{9}\right)$.
11. $(-0.5)\div(-0.32)$.
12. $(-3)\div\left(+\dfrac{1}{3}\right)$.
13. $\left(+\dfrac{2}{3}\right)\div(-5)$.
14. $3\div(-0.3)$.
15. $\dfrac{-0.3}{3\dfrac{2}{3}}$.
16. $\dfrac{1}{-0.3}$.
17. $\dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}}$.
18. $\dfrac{-\dfrac{1}{2}}{3}$.
19. $(-0.33)\div\left(+\dfrac{1}{3}\right)\div(-9)$.
20. $\left(-\dfrac{1}{3}\right)\div\left(-\dfrac{1}{0.9}\right)\div\left(-\dfrac{2}{7}\right)$.

§1·16 倒　数

在算术里，我们学到过：

$$3\div\frac{2}{5}=3\times\frac{5}{2},\qquad 11\div12=11\times\frac{1}{12}.$$

就是：一个数除以 $\frac{2}{5}$ 等于这个数乘以 $\frac{5}{2}$；一个数除以 12 等于这个数乘以 $\frac{1}{12}$. 这里 $\frac{2}{5}$ 与 $\frac{5}{2}$，12 与 $\frac{1}{12}$，有一个共同的性质：乘积等于 1.

如果有两个数的乘积等于 1，那末它们叫做**互为倒数**. 这两个数中的每一个就叫做另一个的倒数.

例如 $\frac{2}{5}$ 的倒数是 $\frac{5}{2}$，$\frac{5}{2}$ 的倒数是 $\frac{2}{5}$，$\frac{2}{5}$ 与 $\frac{5}{2}$ 互为倒数；12 的倒数是 $\frac{1}{12}$，$\frac{1}{12}$ 的倒数是 12，$\frac{1}{12}$ 与 12 互为倒数.

要求一个数的倒数，只要把 1 除以这个数，所得的商就是它的倒数. 例如 -3 的倒数是 $-\frac{1}{3}$，$-1\frac{2}{7}$ 的倒数是 $\dfrac{1}{-1\frac{2}{7}}=-\frac{7}{9}$.

因为一个数除以另一个数，就等于第一个数乘以第二个数的倒数，这样，我们可以利用倒数把除法转化为乘法. 这个性质，在有理数里也是适用的.

习　题　1·16

1．求下列各个数的倒数：13，-7，$\frac{3}{4}$，$-\frac{1}{5}$，1，-1，0.33.

2．一个正数的倒数是怎样的数？一个负数的倒数是怎样的数？

“零”有没有倒数？

3．有没有一个数的倒数就是这个数本身？有几个？哪几个？

4．求下列各数的倒数，和这些倒数的相反的数：

$$-13,\quad 200,\quad 0.03,\quad -0.1.$$

5．求下列各数的相反的数，和这些相反的数的倒数：

$$\frac{2}{3},\quad -\frac{6}{5},\quad -16,\quad +8.$$

6．求 $-\frac{2}{3}$ 及 $\frac{2}{5}$ 的倒数的和，它们的和的倒数．

7．把下列除法，转化为乘法演算：

(1) $\left(-\frac{2}{3}\right)\div(-5)$；　　(2) $3\div\left(-\frac{3}{2}\right)$．

§1·17　除法的运算性质

1．除法的运算性质 1　我们来看下面的问题：

问题 1．有货物一批，要运往农村支援农业生产，共重 72 吨．现在有 3 条船，每船的载重量是 6 吨，一共要装运几次？

【解 1】可以这样考虑：每装运一次，3 条船共可以装运 6×3 吨，得算式：

$$72\div(6\times3)=72\div18=4.$$

答：共装运四次．

【解 2】也可以这样考虑：每船每次装运 6 吨，一共要装 $72\div6$ 船，现在有 3 条船同时装，要再除以 3，得算式：

$$72\div6\div3=12\div3=4.$$

答：共装运四次．

这两种算法的结果是一样的．那就是说：一个数除以两数的积，所得的商和这个数连续除以这两个数最后所得的商

是相等的．这一性质还可以推广到一个数除以两个以上的数的积．事实上，这一性质可以从倒数概念和乘法的运算律得出，例如

$$72\div(6\times3)=72\times\frac{1}{6\times3}=72\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=72\div6\div3.$$

这一性质，也适用于有理数的除法，例如

$$\begin{aligned}&(-32000)\div[(-32)\times(+8)]\\&\quad=(-32000)\div(-256)=125,\\&(-32000)\div[(-32)\times(+8)]\\&\quad=(-32000)\div(-32)\div(+8)\\&\quad=1000\div8=125.\end{aligned}$$

它们的结果相同．

除法的运算性质 1：一个数除以几个数的积，等于把这个数连续除以各个因数．

2．除法的运算性质 2 我们再来看下面的问题：

问题 2．有 3 亩棉田，第一次采摘籽棉 300 斤，第二次采摘籽棉 180 斤，第三次又采摘籽棉 153 斤，总共在三次里平均每亩已采摘了几斤籽棉？

【解 1】 三次一共采摘了(300+180+153)斤，再除以 3，得算式：

$$(300+180+153)\div3=633\div3=211.$$

答：三次总共已采摘籽棉平均每亩 211 斤．

【解 2】 也可以计算每次每亩平均采摘数，再行相加，得算式：

$$300\div3+180\div3+153\div3=100+60+51=211.$$

答：三次总共已采摘籽棉平均每亩 211 斤．

这两种算法的结果是一样的．

这个性质，也适用于有理数的除法，当然除数不允许是

零．例如

$$\left[(-16)+(-50)+\left(+3\frac{2}{5}\right)\right]\div 2$$
$$=\left(-62\frac{3}{5}\right)\div 2=-31\frac{3}{10};$$

也可以这样算：

$$\left[(-16)+(-50)+\left(+3\frac{2}{5}\right)\right]\div 2$$
$$=(-16)\div 2+(-50)\div 2+\left(+3\frac{2}{5}\right)\div 2$$
$$=(-8)+(-25)+\left(+1\frac{7}{10}\right)=-31\frac{3}{10}.$$

这个性质，也可以从倒数概念和乘法运算定律得出，例如

$$\left[(-16)+(-50)+\left(+3\frac{2}{5}\right)\right]\div 2$$
$$=\left[(-16)+(-50)+\left(+3\frac{2}{5}\right)\right]\times\frac{1}{2}$$
$$=(-16)\times\frac{1}{2}+(-50)\times\frac{1}{2}+\left(+3\frac{2}{5}\right)\times\frac{1}{2}$$
$$=(-16)\div 2+(-50)\div 2+\left(+3\frac{2}{5}\right)\div 2.$$

一般地说，我们有**除法的运算性质 2**：几个数的和除以一个数，等于把各个加数分别除以这个数，再把各个商相加．

例 1．计算：$(-1155)\div[(-11)\times(+3)\times(-5)]$．

【解】 应用除法的运算性质 1，把被除数连续除以除数里各个因数：

$$(-1155)\div[(-11)\times(+3)\times(-5)]$$
$$=(-1155)\div(-11)\div(+3)\div(-5)$$
$$=105\div 3\div(-5)=35\div(-5)=-7.$$

说明　这样做数字较小，可以心算．

例 2. 计算：$(-170000)\div(-16)\div(-25)\div(-25)$.

【解】 应用除法的运算性质 1，把各个除数先乘起来：

$$\begin{aligned}&(-170000)\div(-16)\div(-25)\div(-25)\\&=(-170000)\div[(-16)\times(-25)\times(-25)]\\&=(-170000)\div(-10000)=17.\end{aligned}$$

说明 如果逐步由左到右，计算就较繁.

例 3. 计算：$[(-1236)+(+570.6)+(-273)]\div 3$.

【解】 应用除法运算性质 2，先除后加：

$$\begin{aligned}&[(-1236)+(+570.6)+(-273)]\div 3\\&=(-1236)\div 3+(+570.6)\div 3+(-273)\div 3\\&=(-412)+(+190.2)+(-91)=-312.8.\end{aligned}$$

说明 先除后加，数字较小.

例 4. 计算：$(-125)\div 3+(-62)\div 3+(+187)\div 3$.

【解】 应用除法运算性质 2，先加后除：

$$\begin{aligned}&(-125)\div 3+(-62)\div 3+(+187)\div 3\\&=[(-125)+(-62)+(+187)]\div 3\\&=0\div 3=0.\end{aligned}$$

说明 先除后加，不能整除，所以先加后除，比较方便.

习　题　1·17

用较简便的方法计算：

1. $(-132639)\div[(-13)\times(+3)]$.
2. $(-1536)\div[(-2)\times(-3)\times(-32)]$.
3. $375\div\left(-\frac{2}{3}\right)\div\left(-\frac{3}{2}\right)$.
4. $[(-143)+(-390)+(+1326)]\div(-13)$.
5. $(-125)\div 13+(+325)\div 13+(+1100)\div 13$.
6. $\left(-13\frac{1}{3}\right)\div 5+\left(-5\frac{2}{3}\right)\div 5+\left(-196\frac{1}{7}\right)\div 5+\left(+76\frac{1}{7}\right)\div 5$.

§1·18 有理数的乘方

我们来看下面的问题:

问题1. 一块正方形的地的一边长8米，它的面积是多少平方米?

【解】 可以用乘法计算:

$$8\times 8=64.$$

答: 这块地的面积是64平方米.

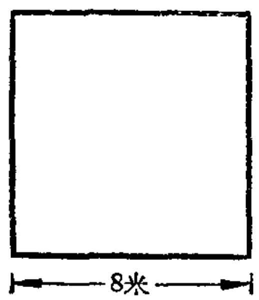


图 1·19

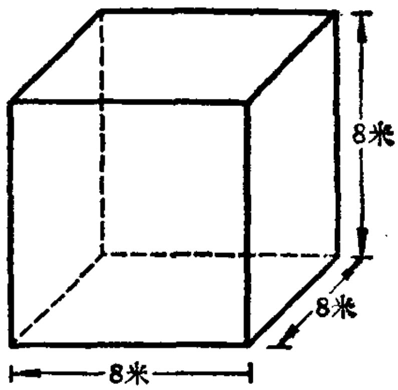


图 1·20

问题2. 一个正方体的每一条棱长是8米，它的体积是多少立方米?

【解】 也可以用乘法计算:

$$8\times 8\times 8=512.$$

答: 这个正方体的体积是512立方米.

上面两个问题里的乘法都是相同因数的乘法. 为了简便起见,我们把 8×8 用 8^2 来表示,把 $8\times 8\times 8$ 用 8^3 来表示.

这就是说: 相同因数的乘法,我们可以只写出一个因数,而在这个因数的右上角写上相同因数的个数.

同样地, $3\times 3\times 3\times 3$ 可以用 3^4 来表示;

$(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)$ 可以用 $(-1)^5$ 来表示.

求相同因数的积的运算叫做**乘方**，这个相同的因数叫做**底数**，相同因数的个数叫做**指数**，几个相同因数的积叫做底数的**几次方**，或者**几次幂**. 例如 8^2 读做 8 的二次方或者 8 的二次幂，也叫做 8 的**平方**；8^3 读做 8 的三次方或者 8 的三次幂，也叫做 8 的**立方**；3^4 读做 3 的四次方或者 3 的四次幂，$(-1)^5$ 读做 -1 的五次方或者 -1 的五次幂. 这里 8, 3, -1 等是底数，而右上角的 2, 3, 4, 5 等分别是指数.

附注 一个数也可以当做这个数的一次幂或一次方，例如 5 可以看做 5^1，而这个指数 1 字是省略不写的.

乘方就是相同因数的乘法，所以有理数的乘方，就只要依照有理数的乘法法则进行计算.

例 1. 计算：$(-2)^2$；$(-2)^3$；$(-1)^4$；$(-1)^5$.

【解】 $(-2)^2=(-2)\times(-2)=+4$；

$(-2)^3=(-2)\times(-2)\times(-2)=-8$；

$(-1)^4=(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)=+1$；

$$(-1)^5=(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)$$
$$=-1.$$

在这个例子里，可以看到：底数是负数时，它的偶次幂是正数，奇次幂是负数.

这样，我们就得到下列乘方的运算法则：

（i）正数的乘方，不论任何次幂，都是正数；

（ii）负数的偶数次幂是正数，负数的奇数次幂是负数；

（iii）零的任何次幂都是零；

（iv）幂的绝对值，就是底数的绝对值按指数的次数实际进行乘法运算的结果.

例 2. 读出下列各式子，并说明这个幂里面的底数和指数：

$$(-3)^2;\quad (+2)^4;\quad \left(\frac{2}{3}\right)^3;\quad (-1)^{51};\quad (-0.3)^5.$$

【解】

$(-3)^2$：读做“负三的二次幂”或“负三的平方”，底数是 -3，指数是 2；

$(+2)^4$：读做“正二的四次幂”，底数是 $+2$，指数是 4；

$\left(\frac{2}{3}\right)^3$：读做“三分之二的三次幂”，或“三分之二的立方”，底数是 $\frac{2}{3}$，指数是 3；

$(-1)^{51}$：读做“负一的五十一次幂”，底数是 -1，指数是 51；

$(-0.3)^5$：读做“负十分之三的五次幂”，底数是 -0.3，指数是 5.

例 3. 计算：

(1) 3^5；　(2) 2^4；　(3) $(-1)^2$；

(4) $(-2)^3$；　(5) $(-3)^2$；　(6) $(-1)^{100}$；

(7) $(0.1)^2$；　(8) $(-0.1)^2$；　(9) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$；

(10) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$.

【解】

(1) $3^5=243$；　(2) $2^4=16$；

(3) $(-1)^2=+1$；　(4) $(-2)^3=-8$；

(5) $(-3)^2=+9$；　(6) $(-1)^{100}=+1$；

(7) $(0.1)^2=0.01$；　(8) $(-0.1)^2=+0.01$；

(9) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2=+\frac{4}{9}$;　　(10) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3=-\frac{27}{64}$.

例 4. 计算：(1) 2^3；(2) 3^2；(3) 2×3；并说明它们的区别.

【解】 (1) $2^3=8$；　(2) $3^2=9$；　(3) $2\times3=6$.

2^3是 2 的立方，就是$2\times2\times2$；3^2是 3 的平方，就是3×3；2×3是两个不同的因数 2 与 3 的积，这三个式子是不相同的.

例 5. 说明下面两个式子的区别并分别计算出结果来：

$$(-3)^2;\qquad\qquad -3^2.$$

【解】

$(-3)^2$等于$(-3)\times(-3)$，读做"负三的平方"，

$$(-3)^2=(-3)\times(-3)=+9;$$

-3^2 等于 $-(3\times3)$，读做"负的三平方"，

$$-3^2=-(3\times3)=-9.$$

习　题　1·18

1. 把下列各个式子读出来，说明它的底数和指数，用乘法式子来表示它，并算出结果：

(1) 5^3；　　(2) $(-2)^6$；

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$；　　(4) $\left(-\frac{3}{4}\right)^4$.

2. 计算：

(1) 3^4；　　(2) 2^5；

(3) $(-3)^4$；　　(4) $(-2)^5$；

(5) 0^8；　　(6) $(-1)^2$；

(7) $(-1)^3$；　　(8) $(-5)^4$.

3. 计算：

(1) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$；　　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$；

(3) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$;　　(4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$;

(5) $\left(-\frac{3}{2}\right)^6$;　　(6) $\left(-\frac{5}{7}\right)^2$;

(7) $\left(-\frac{11}{12}\right)^2$;　　(8) $\left(-\frac{5}{9}\right)^3$.

4. 计算:

(1) $(0.1)^2$;　　(2) $(-0.1)^2$;

(3) $(-0.1)^3$;　　(4) $(0.02)^4$;

(5) $(-0.3)^3$;　　(6) $(-0.7)^2$;

(7) $(0.03)^3$;　　(8) $(-1.2)^3$.

5. 计算:

(1) $(-1)^{100}$;　　(2) $(-1)^{127}$;

(3) $(-1)^{1016}$;　　(4) $(-1)^{3083}$.

6. 计算:

(1) $(-5)^2$;　　(2) -5^2;

(3) -1^{100};　　(4) $(-1)^{100}$;

(5) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$;　　(6) $-\left(\frac{1}{2}\right)^5$;

(7) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$;　　(8) $-\left(\frac{2}{3}\right)^4$.

§1·19　一位数与两位数的平方表

下页的表是一位数与两位数的平方表. 从这个表上，我们可直接查得从 1 到 99 的各正整数的平方，减少计算的麻烦.

表的查法:

从左面直列内看底数的十位数字所在的横行.

从上面横行内看底数的个位数字所在的直列.

表内直列与横行交叉地方的数就是所求的平方数.

例 1. 从表查 37^2 和 72^2.

十位数字＼个位数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

【解】 从平方表上，看左面直列里的 3 字所在的横行与上面横行里 7 字所在的直列. 从这横行向右，这直列向下到交叉处查得

$$37^2=1369.$$

同样,从平方表上,查得

$$72^2=5184.$$

因为负数的平方等于正数，而它们的绝对值和它们的相反的数的平方的绝对值相同,所以从这个表上,我们也可以查负的一位数或两位数的平方.

例 2. 从表查$(-73)^2$及$(-86)^2$.

【解】 从平方表，$73^2=5329,\quad \therefore\quad (-73)^2=+5329;$

$86^2=7396,\quad \therefore\quad (-86)^2=+7396.$

习 题 1·19

1. 应用平方表查下列各个幂的值:

(1) 56^2; (2) $(+85)^2$; (3) $(-34)^2$; (4) $(-97)^2$.

2. 应用平方表，计算下列各式的值：

(1) $(-59)^2$; (2) -89^2;

(3) $-(-79)^2$; (4) -68^2.

3. 应用平方表，计算下列各式的值：

(1) 32^2+56^2; (2) 71^2-93^2;

(3) -72^2-54^2; (4) $-33^2-(-44)^2$.

4. 观察平方表，回答下列问题：

(1) 一位数的平方会等于或大于 100 吗？

(2) 二位数的平方会小于 100 吗？会大于或等于 10000 吗？

(3) 一位数的平方是几位数，你能够说明它的范围吗？

(4) 二位数的平方是几位数，你能够说明它的范围吗？

§1·20 有理数的运算顺序

到这里为止，我们已经学过有理数的加、减、乘、除和乘方五种运算．这五种运算里：

加、减法叫做**第一级运算**，乘、除法叫做**第二级运算**，乘方叫做**第三级运算**．

在具有各种运算的式子里，对于**有理数的运算顺序**，和算术里一样，作如下的规定：

(i) 如果没有括号，那末运算顺序是：先做第三级运算，乘方；次做第二级运算，乘、除；再做第一级运算，加、减．

(ii) 在同一级的几个连续运算中，依照由左到右的次序进行演算．

(iii) 有括号的部分，括号里的运算先做．

遇有可以应用加法交换律、结合律，乘法交换律、结合律或乘法对于加法的分配律和减法及除法运算性质使演算比较简便的地方，可以应用这些性质，变更上面规定的运算顺序．

例 1. 计算:

$$\left(-\frac{5}{8}\right)\times(-4)^2-0.25\times(-5)\times(-4)^3.$$

【解】 $\left(-\frac{5}{8}\right)\times(-4)^2-0.25\times(-5)\times(-4)^3$

$$=\left(-\frac{5}{8}\right)\times(+16)-0.25\times(-5)\times(-64)$$

$$=-10-(+80)=-90.$$

说明 先做乘方,再做乘法,再做减法.

例 2. 计算: $\{(+12)\div[(-3)+(-15)]\div5\}^3$.

【解】 $\{(+12)\div[(-3)+(-15)]\div5\}^3$

$$=\{(+12)\div(-18)\div5\}^3$$

$$=\left\{-\frac{2}{3}\div5\right\}^3=\left(-\frac{2}{15}\right)^3=-\frac{8}{3375}.$$

说明 因为有括号的关系,先做中括号里的加法,再做大括号里的除法,再做乘方.

例 3. 计算:

$$(-5)\times\left(-3\frac{6}{7}\right)+(-7)\times\left(-3\frac{6}{7}\right)+(+12)\times\left(-3\frac{6}{7}\right).$$

【解】 应用乘法对于加法的分配律:

$$(-5)\times\left(-3\frac{6}{7}\right)+(-7)\times\left(-3\frac{6}{7}\right)+(+12)\times\left(-3\frac{6}{7}\right)$$

$$=[(-5)+(-7)+(+12)]\times\left(-3\frac{6}{7}\right)$$

$$=0\times\left(-3\frac{6}{7}\right)=0.$$

习 题 1·20

计算:

1. $(-5)\times(-4)+3\times(-2)$.

2. $1\frac{1}{2}+\left(-2\frac{1}{2}\right)\div 2$.

3. $12\times\left(-\frac{3}{4}\right)-(-15)\times 1\frac{1}{5}$.

4. $\left[\left(-1\frac{1}{2}\right)+\left(-2\frac{1}{2}\right)\right]\div(-2)^3$.

5. $(-12)\div(-3)^2+(-15)\div 5$.

6. $(-1)-\left(-5\frac{1}{2}\right)\times\frac{4}{11}+(-8)\div[(-3)+5]$.

7. $[0-(-3)]\times(-6)-12\div[(-3)+(-15)\div 5]$.

8. $-6\frac{7}{9}-\left[\frac{3}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+0.2+1\frac{3}{5}\div\frac{8}{7}\right]$.

9. $2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1$.

10. $-2^2-(-2)^2-2^3+(-2)^3$.

本 章 提 要

1. 本章的几个重要概念 数轴，数的绝对值，相反的数，倒数，代数和.

2. 有理数的分类 它有两种分法：

$$
(1)\ \text{有理数}\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\text{正有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正整数(自然数)}\\ \text{正分数(包括正的可以化成分数的小数)}\end{array}\right.\\
\text{零}
\end{array}\right\}\text{非负有理数}\\
\text{负有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{负整数}\\ \text{负分数(包括负的可以化成分数的小数)}\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

$$
(2)\ \text{有理数}\left\{\begin{array}{l}
\text{整\quad 数}\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{正整数}\\ \text{零}\end{array}\right\}\text{非负整数}\\ \text{负整数}\end{array}\right.\\
\text{分\quad 数}\left\{\begin{array}{l}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

3. 有理数的运算

(1) 运算种类——加、减(第一级)，乘、除(第二级)，乘方(第三级).

(2) 运算法则——有理数加法法则；有理数减法法则；
有理数乘法法则；有理数除法法则；
有理数乘方的法则.

(3) 运算性质——加法交换律，加法结合律；
乘法交换律，乘法结合律，乘法对于加法的分配律；
减法运算性质；
除法运算性质(二条).

(4) 运算顺序——先做括号内. 除此之外，先第三级运算，次第二级运算，再第一级运算；同级运算，从左到右.

复 习 题 一

(这里及以后标有*号的题目，做起来如有困难，可以暂时略去.)

1. 画一个数轴，并在数轴上指出绝对值大于 2 而小于 5 的所有整数的各对应点.

2. 画一个数轴，并在数轴上指出绝对值不大于 3 的所有正整数的各对应点.

3. 0 是最小的有理数吗？最小的整数吗？有没有最小的有理数？有没有最小的整数？

4. 0 是绝对值最小的有理数吗？0 是绝对值最小的整数吗？

5. 写出大于 -3 而小于 4 的所有整数.

6. 写出绝对值大于 3 而小于 8 的所有整数.

7. 写出绝对值不大于 7 而又不小于 5 的所有整数.

8. 写出绝对值大于 5.1 而小于 9.3 的所有负整数.

9. 求出绝对值大于 1 而小于 4 的所有正整数的和.

10. 求出绝对值不小于 2 而又不大于 4 的所有整数的积.

11. 比较下列各组数的大小，用大于号连结起来:

(1) $-3, -5$;　　(2) $-\frac{1}{3}, -0.3$;　　(3) $|-5|, |-7|$;

(4) $-|-5|, -|-7|$;　(5) $-\frac{1}{13}, -0.077$.

12. 求出上题中各组数的差，使差是正的.

13. 求 -15 与 $+7$ 两数的和，求它们的和的绝对值，求它们的绝对值的和.

14. 求 -3, -5, $+1.4$ 三个数的和的绝对值，求它们的绝对值的和.

15. 求 $-\frac{2}{3}$ 与 $+\frac{4}{5}$ 的和的相反的数；求 $-\frac{4}{5}$ 与 $+\frac{1}{3}$ 的和的倒数.

16. 求 -5 与 $-\frac{1}{3}$ 的相反数的和；求 -5 与 $-\frac{1}{3}$ 的倒数的和.

计算(17～36 题)：

17. $(-1249)+(-851)+(+379)+(-224)+(-179)+(-376)$.

18. $(-375)-(-175)-(-300)+(-542)-(+377)-(-1600)$.

19. $|3-5|-|(-3)-(-5)|+|(-243)+(-357)|$.

20. $\left|\left(3\frac{1}{2}\right)-\left(-2\frac{1}{3}\right)\right|-\left|\left(-5\frac{1}{3}\right)-\left(-2\frac{1}{2}\right)\right|$.

21. $(-3)\times(-8)+(+5)\times(-7)-(-2)\times(-8)-(+4)$
$\times(+12)$.

22. $(-1000)\div(-250)\times(+36)\div(-144)$.

23. $\left(-3\frac{1}{3}\right)+\left(-5\frac{1}{2}\right)\div\left(+1\frac{2}{9}\right)-\left(-5\frac{1}{3}\right)\times\left(+\frac{9}{16}\right)$.

24. $\left(+3\frac{1}{4}\right)+\left(-5\frac{1}{6}\right)-\left(-1\frac{3}{4}\right)-\left(+3\frac{5}{6}\right)+\left(+12\frac{3}{7}\right)$
$-\left(-12\frac{4}{7}\right)$.

25. $\left[\left(-152\frac{3}{4}\right)-\left(-148\frac{3}{8}\right)\right]\times(0.3)\div(-0.2)$.

26. $\left[\left(-172\frac{5}{6}\right)+\left(+170\frac{1}{3}\right)-\left(+3\frac{5}{12}\right)\right]\div(-0.8)\div(-0.25)$.

27. $\left[\left(-7\frac{1}{9}\right)-\left(-2\frac{14}{15}\right)\right]\div\left[2\frac{2}{3}-\left(-1\frac{3}{5}\right)\right]$.

28. $\left(\frac{1}{20}-\frac{3}{4}\right)\times\left[\frac{5}{7}+\left(-\frac{5}{14}\right)\right]$.

29. $\left(-1\frac{2}{7}\right)\times\frac{5}{7}\div\left(-\frac{3}{4}\right)\times(-2.5)\div(-0.25)\times\frac{2}{5}$
$\times2\frac{1}{3}\div\left(-\frac{5}{7}\right)$.

30. $(-0.2)^3-(0.3)^3+(-0.12)^2-(-0.15)^2$.

31. $(-1)^{1324}+(-1)^{57}-(-1)^{365}$.

32. $\left[2\frac{1}{3}\times\left(-1\frac{2}{7}\right)+\left(-5\frac{1}{3}\right)\div\left(-1\frac{7}{9}\right)\right]^2$.

33. $\left\{\left[4\frac{2}{3}\div\left(-\frac{1}{4}\right)+(-0.4)\times\left(-6\frac{1}{4}\right)\right]\div\left(-\frac{3}{5}\right)-20\right\}$
$\times(-1)^{37}$.

34. $\frac{1}{(-0.2)^3}-\frac{1}{(-0.1)^4}$.

35. $-3^2\times(1.2)^2\div(-0.3)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\times(-3)^3\div(-1)^{25}$.

36. $\dfrac{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-2\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times1\frac{1}{2}-4\times\left(1\frac{1}{2}\right)^2}{2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^3\times\left(1\frac{1}{2}\right)^2-1}$.

37. 两个数的和一定大于两个加数吗？举出一个反面的例子.

38. 两个数的差一定小于被减数吗？举出一个反面的例子.

39. 两个数的积一定大于两个因数吗？举出一个反面的例子.

40. 两个数的商一定小于被除数吗？举出一个反面的例子.

41. 一个数的平方一定大于原数吗？举出一个反面的例子.

42. 一个数的立方一定大于原数吗？举出一个反面的例子.

43. 一个有理数的平方总是正数，这句话对吗？什么时候不对？

44. 一个有理数乘以什么数，总可以得到它的相反的数？一个有理数除以什么数，总可以得到它的相反的数？

45. 有没有一个数的相反的数就是这个数本身？有几个这样的数？

46. 有没有一个数的倒数就是这个数本身？有几个这样的数？

47. 那样的数的相反的数比它本身大？比它本身小？等于它本身？

*48. 那样的数的倒数比它本身大？比它本身小？等于它本身？

[提示：研究下列各种情况：(1)大于 1 的数，(2) 1，(3) 小于 1 的正数，(4)大于 -1 的负数，(5) -1，(6)小于 -1 的数.]

第二章　代　数　式

在上一章里我们学习了关于有理数的知识．从算术里的数扩大到有理数，这是从算术到代数的一个重大的发展．现在，我们还要学习从算术到代数的另一个重大的发展——用字母表示数．

§2·1　用字母表示数

我们曾经在有理数这一章里学到过加法交换律．就是：在加法里，两个加数的前后位置，可以互相对调，它们的和相等．

但是，这句话写起来比较长，领会起来有时也不太容易．可不可以用比较简单明确的方法来叙述呢？

如果我们用两个字母 a 和 b 来表示这两个加数，那末，加法交换律就可以用

$$a+b=b+a$$

来表示，它就很简单，而且很明确．

在算术里，我们知道做两个真分数或假分数的乘法只要把分子分母分别相乘，如果我们用字母 a 和 b 分别表示一个分数的分子和分母，字母 c 和 d 分别表示另一个分数的分子和分母，这个运算法则就可以简单明确地表示成

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}.$$

用同样的方法，我们可以把分数的除法法则表示成

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}.$$

在生产、学习、生活和科学研究上，我们会碰到许多计算的公式，用字母来表示有关的数，就可以使这些公式大大简化。例如，在算术里，我们学过矩形（长方形）的面积计算公式是：面积＝长×宽；正方形的面积计算公式是：面积＝边长×边长等．如果我们用字母 S 表示矩形或正方形的面积，字母 b 和 h 表示矩形的长和宽，a 表示正方形的边长，那末这两个公式就可以写成

矩形的面积公式：

$$S=b\times h,$$

正方形的面积公式：

$$S=a\times a=a^2.$$

这样就很简单明确．

例　用 a, b, c 等表示任意有理数，把第一章里面学到过的一些运算性质表示出来．

【解】

加法交换律：

$$a+b=b+a;$$

加法结合律：

$$(a+b)+c=a+(b+c);$$

乘法交换律：

$$a\times b=b\times a;$$

乘法结合律：

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c);$$

乘法对于加法的分配律：

$$a\times(b+c+d)=a\times b+a\times c+a\times d;$$

减法的运算性质：

$$a-(b+c+d)=a-b-c-d.$$

除法的运算性质：

(1) $a\div(b\times c\times d)=a\div b\div c\div d$;

(2) $(a+b+c)\div d=a\div d+b\div d+c\div d$.

习 题 2·1

1．用字母来表示有理数的减法法则：从一个数减去另一个数，等于这个数加上另一个数的相反的数．

[提示：以字母 a 表示一个数，用字母 b 表示另一个数，那末另一个数的相反的数就可以用 $-b$ 来表示．]

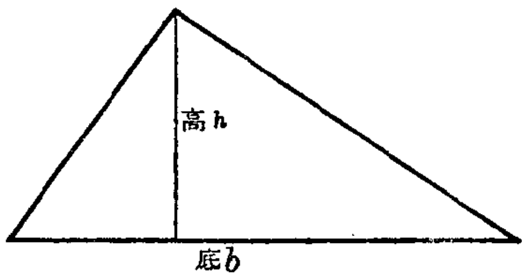
2．用字母来表示分数的基本性质：一个分数的分子分母同乘以一个不是零的数，分数的值不变．

[提示：把分数的分子分母分别用字母 a 和 b 来表示，一个不是零的数用 m 来表示．]

3．一个三角形的面积等于它的底边与高的乘积的二分之一，即

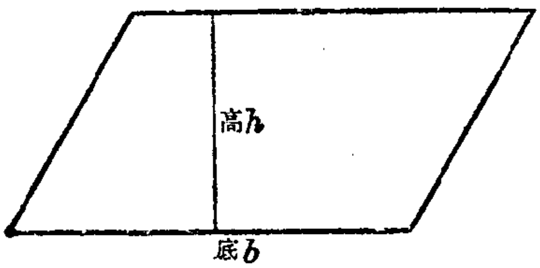
三角形的面积 $=\frac{1}{2}\times$底边$\times$高．

如果用字母 S 表示三角形的面积，b 表示它的底边，h 表示它的高，试用 S, b, h 写出三角形的面积公式．

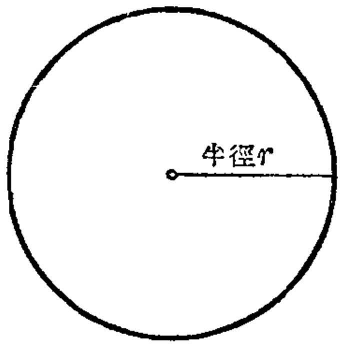


(第 3 题)

4．一个平行四边形的面积等于它的底边与高的乘积．用字母 S 表示面积，b 表示底边，h 表示高，试用 S, b, h 写出平行四边形的面积公式．



(第 4 题)



(第 5 题)

5. 一个圆的周长等于它的半径乘以圆周率的2倍. 如果用字母C表示圆的周长，r表示半径，用希腊字母π表示圆周率，写出圆的周长的公式.

6. 一个圆的面积等于它的半径的平方乘以圆周率. 如果用字母S表示圆的面积，r表示它的半径，用希腊字母π表示圆周率，写出圆的面积公式.

7. 一列火车行驶的距离等于它的平均速度乘上行驶的时间. 如果用字母s表示它行驶的距离，v表示它的平均速度，t表示它的行驶的时间，写出火车行驶距离的公式.

§2·2 代 数 式

用字母表示数之后，我们就会得到包含字母的一些计算式子，象$a+b$, $a\times b$, $\frac{1}{2}\times a\times b$, a^2, $(a+b)\times c$, $\pi\times r^2$, 等. 我们把这类式子叫做代数式. 代数式的共同特点是，它们都包含表示数的数字或字母，同时还常常包含运算的符号，所以我们说：

用运算符号把表示数的数字或字母连结起来所得到的式子叫做代数式.

用数字或者字母表示的一个单独的数，也可以看作是代数式.

例如：3, -5, x, 1, 0等也可以看作代数式.

在算术里，乘号总是用“×”来表示的. 在代数里，我们仍旧使用这个乘号“×”. 但有时，如果两个有理数用括号括起来之后再相乘，或者一个数乘以一个用字母表示的数，或者两个用字母表示的数相乘，我们可以把乘号写做“·”，或者就把乘号省略掉.

例如：

$(-3)\times(-5)$可以写做$(-3)\cdot(-5)$或者$(-3)(-5)$；

$3\times a$ 可以写做 $3\cdot a$ 或者 $3a$；

$a\times b$ 可以写做 $a\cdot b$ 或者 ab；

今后一般地我们总是把乘号省略掉的.

§2·3 列代数式

在代数里，我们常常需要把用文字叙述的一句话或一些计算关系列成代数式，举例如下：

例1. 用代数式表示：

(1) 一个数 a 的 3 倍；　(2) 一个数 b 的平方；

(3) 两个数 a 与 b 的和；　(4) 一个数 a 的 3 倍加上 5.

【解】 (1) $3a$；　(2) b^2；　(3) $a+b$；　(4) $3a+5$.

注意　a 的 3 倍，就是 $a\times 3$，但是，习惯上总把数字因数写在前面，所以写做 $3a$.

例2. 用代数式表示：

(1) 两个数 a 与 b 的和的 3 倍；

(2) 一个数 a 的 3 倍与另一个数 b 的 5 倍的和；

(3) 数 a 的平方与数 b 的平方的和；

(4) 两个数 a 与 b 的和的平方.

【解】 (1) $3(a+b)$；　(2) $3a+5b$；

(3) a^2+b^2；　(4) $(a+b)^2$.

注意　根据先乘除、后加减的运算顺序的规定，在代数式里，要表示先乘除后加减的运算就不必用括号；如果要表示先加减后乘除的运算，就需要用括号. 同样的，先乘方后加就不需要括号，先加后乘方就需用括号.

例 3. 用代数式表示：

(1) 一个数 a 的平方的 3 倍；

(2) 一个数 a 的 3 倍的平方；

(3) 一个数 a 的平方的相反的数；

(4) 一个数 a 的相反的数的平方.

【解】 (1) $3a^2$； (2) $(3a)^2$； (3) $-a^2$； (4) $(-a)^2$.

注意 根据先乘方后乘除的运算顺序的规定，在代数式里，表示先乘方后乘除，不必用括号；如果要表示先乘除后乘方，就要用括号.

例 4. 有一个数是 x，列出代数式表示比 x 大 1 的数，比 x 小 3 的数.

【解】 比 x 大 1 的数就是 $x+1$；比 x 小 3 的数就是 $x-3$.

例 5. 有一个数是 x，列出代数式表示比 x 的 3 倍还大 5 的数，比 x 的倒数小 6 的数.

【解】 比 x 的 3 倍还大 5 的数：$3x+5$；

比 x 的倒数小 6 的数：$\dfrac{1}{x}-6$.

例 6. 一个分数的分子是 x，分母比分子的 2 倍大 3，列出代数式表示这个分数；列出代数式表示这个分数的倒数.

【解】 这个分数是 $\dfrac{x}{2x+3}$；

这个分数的倒数是 $\dfrac{2x+3}{x}$.

例 7. 汽车的速度平均每小时 m 公里，(1) 3 小时共行多少公里？ (2) t 小时共行多少公里？ (3) 要行 100 公里需要多少小时？ (4) 要行 s 公里需要多少小时？

分析 速度、时间与行程三个量之间的关系是：

$$\text{速度}\times\text{时间}=\text{行程}，\quad \text{或}\quad \text{时间}=\frac{\text{行程}}{\text{速度}}.$$

【解】 (1) 汽车 3 小时共行 $3m$ 公里；

(2) 汽车 t 小时共行 mt 公里(或 tm 公里);

(3) 要行 100 公里需要 $\frac{100}{m}$ 小时;

(4) 要行 s 公里需要 $\frac{s}{m}$ 小时.

例 8. 有一块长方形土地,它的长是 a 米,宽是 b 米,(1)面积多少平方米? (2)如果要在这块地的四边挖掘一条沟,这条沟的内圈一共多少长?

分析 长方形的面积=长×宽.

长方形的周长=(长+宽)×2.

【解】 (1) 这块土地的面积是 ab 平方米;

(2) 这条沟的内圈的总长是 $2(a+b)$ 米.

习 题 2·3

1. 写出下列代数式:

(1) 一个数 a 的 10 倍; [解法举例: $10a$.]

(2) 一个数 a 加上 10;

(3) 一个数 a 的五分之一;

(4) 一个数 a 加上 $\frac{1}{5}$;

(5) 一个数 a 减去 5;

(6) 从 5 减去一个数 a;

(7) 一个数 a 除以 5;

(8) 5 除以一个数 a;

(9) 一个数 a 的 b 倍;

(10) 一个数 a 除以另一个数 b.

2. 如 a, b 表示数,写出下列代数式:

(1) a 与 b 的和; [解法举例: $a+b$.]

(2) a 与 b 的积;

(3) a 的 4 倍与 b 的 3 倍的和;

(4) a 与 b 的积再加上 5;

(5) a 的 3 倍与 b 的五分之一的和;

(6) a 的 $\frac{1}{4}$ 与 b 的 5 倍的和;

(7) a 的平方与 b 的平方的和;

(8) a 的平方与 b 的和;

(9) a 的 3 倍与 b 的平方的和;

(10) a 的平方与 b 的立方的和.

3. 写出下列代数式:

(1) a 与 b 的和的 3 倍; [解法举例: $3(a+b)$.]

(2) a 与 b 的和的平方; (3) a 加 3 所得的和的 5 倍;

(4) a 加 3 所得的和的平方; (5) a 与 b 的和的立方;

(6) a 与 b 的积的平方; (7) a 除以 b 后所得的商的立方;

(8) a 加 b 所得的和除以 a 与 b 的积;

(9) a 的 3 倍与 b 的 2 倍的和除以 a 的 2 倍与 b 的 3 倍的和;

(10) a 的平方与 b 的平方的和的平方.

4. 写出下列代数式:

(1) a 与 b 的和的相反的数; [解法举例: $-(a+b)$.]

(2) a 的相反的数与 b 的和;

(3) a 的相反的数与 b 的相反的数的代数和;

(4) a 的平方的相反数加上 5; (5) a 的相反数的平方减去 5;

(6) a 的倒数; (7) a 的倒数与 b 的倒数的和;

(8) a 的平方的倒数加上 b 的平方的倒数;

(9) a 的倒数与 b 的相反的数的和;

(10) a 与 b 的和的倒数.

5. 写出下列代数式:

(1) a 的绝对值; [解法举例: $|a|$.]

(2) a 的相反的数的绝对值; (3) a 的绝对值的相反的数;

(4) a 的倒数的绝对值; (5) a 的绝对值的倒数;

(6) a 与 b 的和的绝对值; (7) a 的绝对值与 b 的绝对值的和;

(8) a 减去 b 的 3 倍所得的差的绝对值;

(9) a 与 b 的积的绝对值;

(10) a 与 b 的积的相反的数的绝对值.

6. 一个分数, 分子是 x, 分母比分子的 5 倍小 3, 列出这个分数的代数式; 列出另一个分子分母都比这个分数的分子分母小 1 的分数的代数式.

7. 一个分数的分子是 x, 分母比分子的平方小 6, 列出这个分数的代数式; 列出一个代数式表示这个分数的倒数.

8. 一个分数的分母是 x, 分子比分母的相反的数大 6, 列出一个代数式表示另一个分数, 它的分子比这个分数的分子大 3, 它的分母等于

这个分数的分母的平方.

9. 如果一个人骑自行车每小时平均可行 a 公里，(1) 2 小时可行多少公里？(2) b 小时可行多少公里？(3) 要行 50 公里需要多少小时？(4)要行 d 公里需要多少小时？

10. 如果一辆汽车平均每小时行 a 公里，自行车平均每小时行 b 公里，(1)汽车与自行车同时行 3 小时，路程相差多少？(2)乘自行车行 2 小时后再乘汽车行 3 小时，一共行了多少路程？(3)汽车和自行车各行 d 公里，汽车比自行车快多少时间？

11. 一个正方形的一边长 a 厘米，(1)它的面积是多少平方厘米？(2)它的周长是多少厘米？

12. 两个正方形的边长分别是 a 厘米与 b 厘米($a>b$)，(1)它们的面积一共多少？(2)它们的面积相差多少？(3)它们的周长一共多少？(4)它们的周长相差多少？(要注明单位)

§2·4 代数式的值

代数式是表示数的计算式子，如果代数式里的字母用指定的数去代替，再依照代数式里所表示的运算进行计算，所得的结果就叫做**代数式的值**.

例 1. 计算代数式 $-3a^2b$ 的值：

(1) 当 $a=-3$, $b=5$;

(2) 当 $a=0.1$, $b=8$;

(3) 当 $a=\frac{3}{5}$, $b=-8\frac{1}{3}$.

【解】

(1) $-3a^2b=-3(-3)^2(5)=-3\cdot(+9)\cdot5=-135$;

(2) $-3a^2b=-3(0.1)^2(8)=-3(0.01)(8)=-0.24$;

(3) $-3a^2b=-3\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(-8\frac{1}{3}\right)=-3\cdot\frac{9}{25}\cdot\left(-\frac{25}{3}\right)$
$=+9$.

例 2. 计算代数式 $2x^3-5x^2+3x-8$ 的值:

(1) 当 $x=1$; (2) 当 $x=-1$;

(3) 当 $x=\frac{1}{2}$; (4) 当 $x=-\frac{1}{2}$.

【解】

(1) $$\begin{aligned}2x^3-5x^2+3x-8&=2(1)^3-5(1)^2+3(1)-8\\&=2-5+3-8=-8;\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}2x^3-5x^2+3x-8&=2(-1)^3-5(-1)^2+3(-1)-8\\&=2(-1)-5(+1)+3(-1)-8\\&=-2-5-3-8=-18;\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}2x^3-5x^2+3x-8&=2\left(\frac{1}{2}\right)^3-5\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{2}\right)-8\\&=2\left(\frac{1}{8}\right)-5\left(\frac{1}{4}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)-8\\&=\frac{1}{4}-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}-8\\&=-1+1\frac{1}{2}-8=-7\frac{1}{2};\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}&2x^3-5x^2+3x-8\\&=2\left(-\frac{1}{2}\right)^3-5\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3\left(-\frac{1}{2}\right)-8\\&=2\left(-\frac{1}{8}\right)-5\left(+\frac{1}{4}\right)+3\left(-\frac{1}{2}\right)-8\\&=-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}-\frac{3}{2}-8=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-8=-11.\end{aligned}$$

注意 把字母的指定数值代入代数式后,有些乘方或原来省略乘号的地方,需要添上括号或者乘号.

例 3. 计算代数式 $3(3a-2b)^2$ 的值:

(1) 当 $a=-2$, $b=-3$; (2) 当 $a=-2$, $b=+3$;

(3) 当 $a=0.4$, $b=0.3$; (4) 当 $a=-0.4$, $b=-0.3$.

【解】

(1) $3(3a-2b)^2=3[3(-2)-2(-3)]^2$

$=3(-6+6)^2=3\cdot 0^2=0$;

(2) $3(3a-2b)^2=3[3(-2)-2(+3)]^2$

$=3(-6-6)^2=3(-12)^2$

$=3(+144)=432$;

(3) $3(3a-2b)^2=3[3(0.4)-2(0.3)]^2$

$=3(1.2-0.6)^2=3(0.6)^2$

$=3\times 0.36=1.08$;

(4) $3(3a-2b)^2=3[3(-0.4)-2(-0.3)]^2$

$=3(-1.2+0.6)^2=3(-0.6)^2$

$=3\times 0.36=1.08$.

例 4. 计算代数式 $\dfrac{a+2b}{2a+b}$ 的值:

(1) 当 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{1}{3}$; (2) 当 $a=-1\dfrac{1}{2}$, $b=1\dfrac{2}{3}$;

(3) 当 $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=0.3$; (4) 当 $a=-1.3$, $b=-1.5$.

【解】

(1) $$\frac{a+2b}{2a+b}=\frac{\frac{1}{2}+2\left(-\frac{1}{3}\right)}{2\left(\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\times 6}{\left(1-\frac{1}{3}\right)\times 6}$$

$$=\frac{3-4}{6-2}=-\frac{1}{4};$$

(2) $$\frac{a+2b}{2a+b}=\frac{-1\frac{1}{2}+2\left(1\frac{2}{3}\right)}{2\left(-1\frac{1}{2}\right)+\left(1\frac{2}{3}\right)}=\frac{-\frac{3}{2}+\frac{10}{3}}{-3+\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{-9+20}{-18+10}=\frac{11}{-8}=-1\frac{3}{8};$$

(3) $\dfrac{a+2b}{2a+b}=\dfrac{-\dfrac{1}{3}+2(0.3)}{2\left(-\dfrac{1}{3}\right)+0.3}=\dfrac{-\dfrac{1}{3}+0.6}{-\dfrac{2}{3}+0.3}$

$$=\frac{-\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{5}}{-\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{10}}=\frac{-10+18}{-20+9}=\frac{+8}{-11}=-\frac{8}{11};$$

(4) $\dfrac{a+2b}{2a+b}=\dfrac{-1.3+2(-1.5)}{2(-1.3)+(-1.5)}=\dfrac{-1.3-3}{-2.6-1.5}$

$$=\frac{-4.3}{-4.1}=\frac{43}{41}=1\frac{2}{41}.$$

例 5. 计算代数式 $-a^2$ 与 $(-a)^2$ 的值:

(1) $a=5$, (2) $a=-5$, (3) $a=0.13$,

(4) $a=-0.13$, (5) $a=-1\dfrac{2}{3}$;

【解】

(1) $-a^2=-5^2=-25$,

$(-a)^2=(-5)^2=+25$;

(2) $-a^2=-(-5)^2=-25$,

$(-a)^2=[-(-5)]^2=5^2=25$;

(3) $-a^2=-(0.13)^2=-0.0169$,

$(-a)^2=(-0.13)^2=+0.0169$;

(4) $-a^2=-(-0.13)^2=-0.0169$,

$(-a)^2=[-(-0.13)]^2=(0.13)^2=0.0169$;

(5) $-a^2=-\left(-1\dfrac{2}{3}\right)^2=-\left(-\dfrac{5}{3}\right)^2=-\dfrac{25}{9}=-2\dfrac{7}{9}$,

$(-a)^2=\left[-\left(-1\dfrac{2}{3}\right)\right]^2=\left(\dfrac{5}{3}\right)^2=\dfrac{25}{9}=2\dfrac{7}{9}$.

注意 $-a^2$要先平方再添上负号,$(-a)^2$要先添上负号,再行平方.

习　题　2·4

1. 求代数式 $a-b$ 的值(填下表):

a	$+5$	$+5$	-12	-12	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{2}{3}$	$+3.54$
b	$+7$	-7	-3	-20	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-3\frac{1}{4}$	-5.09
$a-b$								

2. 求空格内有关代数式的值,填入下表:

a	5	-2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{2}$	0.3	-0.2	1.2	-2.4
$-3a$								
$3a^2$								
$\frac{3}{a}$								

计算下列代数式的值(3～8):

3. $-\frac{2}{3}ab^2$,

(1) 当 $a=-3$, $b=-2$;　　(2) 当 $a=0.3$, $b=-0.2$;

(3) 当 $a=-2\frac{1}{3}$, $b=-1\frac{1}{7}$;　　(4) 当 $a=-0.12$, $b=+\frac{5}{6}$.

4. $-x^3+2x^2-3x+4$,

(1) 当 $x=2$;　　(2) 当 $x=-2$;

(3) 当 $x=-0.3$;　　(4) 当 $x=-1\frac{2}{3}$.

5. a^2-b^2,

(1) 当 $a=-3$, $b=-5$;　　(2) 当 $a=-5.3$, $b=4.7$;

(3) 当 $a=0.32$, $b=-0.68$;　　(4) 当 $a=2\frac{1}{3}$, $b=-3\frac{1}{4}$.

6. $(a-b)^2$,

(1) 当 $a=-3$, $b=-5$; (2) 当 $a=-0.3$, $b=+0.5$;

(3) 当 $a=-3\frac{2}{3}$, $b=5\frac{1}{2}$; (4) 当 $a=0.7$, $b=-\frac{2}{3}$.

7. $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$,

(1) 当 $a=-2$, $b=-3$; (2) 当 $a=-1\frac{2}{3}$, $b=2\frac{1}{2}$;

(3) 当 $a=0.3$, $b=-0.4$ (4) 当 $a=0.03$, $b=-\frac{1}{30}$.

8. $\frac{1+a+a^2}{1-a+a^2}$,

(1) 当 $a=-5$; (2) 当 $a=-0.2$;

(3) 当 $a=+3\frac{1}{3}$; (4) 当 $a=-3\frac{1}{3}$.

9. 求下表空格内有关代数式的值:

x	3	-3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$1\frac{2}{3}$	$-3\frac{1}{2}$	0.2	-0.3
x^2									
$-x$									
$-x^2$									
$(-x)^2$									

10. 求下表空格内有关代数式的值:

a	5	-5	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-5\frac{1}{3}$
$-a$						
$\|a\|$						
$\|-a\|$						
$-\|-a\|$						

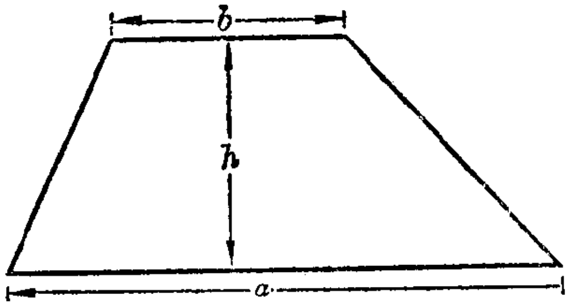
11. 梯形的面积公式是 $S=\frac{(a+b)h}{2}$, 这里 S 表示梯形的面积, a

和 b 表示梯形的两底，h 表示梯形的高；底和高的单位如果是厘米，那末面积的单位是平方厘米．从下列各已知量，求梯形的面积 S：

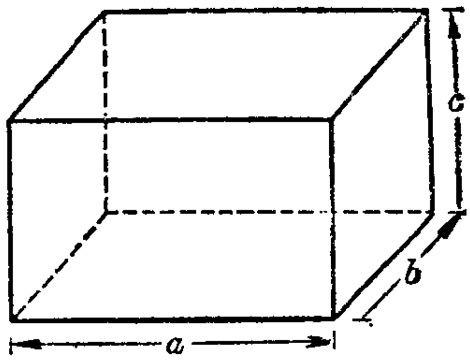
(1) $a=15$ 厘米，　$b=7$ 厘米，　$h=3$ 厘米；

(2) $a=2.4$ 厘米，　$b=1.2$ 厘米，　$h=0.9$ 厘米．

［解法举例：(1) $S=\frac{(a+b)h}{2}=\frac{(15+7)3}{2}=33$（平方厘米）．］



（第 11 题）



（第 12 题）

12．长方体的表面积公式是 $S=2(ab+ac+bc)$，这里 S 表示长方体的表面积，a，b，c 分别表示它的长、宽和高．从下列各已知量，求长方体的表面积：

(1) $a=5$ 厘米，　$b=7$ 厘米，　$c=9$ 厘米；

(2) $a=0.3$ 厘米，　$b=0.2$ 厘米，　$c=0.4$ 厘米．

本 章 提 要

1．用字母表示数来叙述数的运算性质

(1) $a+b=b+a$；（加法交换律）

(2) $(a+b)+c=a+(b+c)$；（加法结合律）

(3) $ab=ba$；（乘法交换律）

(4) $(ab)c=a(bc)$；（乘法结合律）

(5) $a(b+c)=ab+ac$；（乘法对于加法的分配律）

(6) $a-(b+c+d)=a-b-c-d$；（减法的运算性质）

(7) $a\div(bcd)=a\div b\div c\div d$；（除法的运算性质 1）

(8) $(a+b+c)\div d=a\div d+b\div d+c\div d$.（除法的运算性质 2)

2．本章的重要概念 代数式；代数式的值.

复 习 题 二

1．什么叫做代数式？写出三个代数式来.

2．什么叫做代数式的值？代数式 $3a$ 的值一定是正数吗？举出一个反面的例子来.

3．如果字母 a 表示一个正数，那么 $-a$ 表示什么数？举例说明.

4．如果字母 a 表示一个负数，那么 $-a$ 表示什么数？举例说明.

5．如果字母 a 表示数零，那么 $-a$ 表示什么数？

6．如果字母 a 表示一个有理数，列出代数式表示它的相反的数，表示它的绝对值，表示它的 3 倍，表示比它大 3 的数，表示它的平方，表示它的相反的数的平方；并求当 $a=-3$ 时这些代数式的值.

7．如果字母 a 表示一个不是零的数，列出代数式表示它的倒数，表示它的倒数的相反的数，表示它的平方的倒数；并求当 $a=0.3$ 时这些代数式的值.

8．如果字母 a 和 b 表示两个有理数，列出代数式表示它们的和，表示它们的平方的和，表示它们的和的平方，表示它们的相反的数的和，表示它们的倒数的和；并求当 $a=-5$, $b=-3$ 时这些代数式的值.

9．计算下列代数式的值:

(1) $-3x^2-2xy+y^2$，当 $x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{1}{2}$；当 $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{3}$；

(2) x^3-3x^2+5x-7，当 $x=-2$；当 $x=+0.3$.

10．计算下列代数式的值:

(1) $(3a-2b)^2$，当 $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$；当 $a=-\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{2}$；

(2) $(5x-4y)^2$，当 $x=-\frac{1}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$；当 $x=-0.1$, $y=+0.2$.

11．计算下列代数式的值:

(1) $6\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y\right)^2$，当 $x=-3$, $y=+2$；当 $x=-2$, $y=-3$；

(2) $\frac{1}{3}(3x-3y)^2$，当 $x=-5$, $y=-4$；当 $x=1\frac{2}{3}$, $y=3\frac{1}{3}$.

12. 计算下列代数式的值:

(1) $\frac{xy}{x+y}$, 当 $x=-5$, $y=-7$; 当 $x=-\frac{1}{5}$, $y=-\frac{1}{7}$;

(2) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$, 当 $a=-3$, $b=2$; 当 $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{2}$.

13. 计算: $(a+b)^2-(a-b)^2$ 的值, 当 $a=-\frac{2}{3}$, $b=-\frac{3}{2}$.

14. 计算: $3(a+b)^2-6ab$ 的值, 当 $a=-1\frac{2}{3}$, $b=-2\frac{1}{2}$.

15. 计算: $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ 的值, 当 $x=-\frac{2}{3}$, $y=+\frac{1}{2}$.

16. 计算: $-3(x-2y)^5-2(2x-y)^5$ 的值, 当 $x=-2$, $y=-1$.

17. (1) 计算: $|x+y|+|x-y|$ 的值, 当 $x=-3$, $y=-5$;

(2) 计算: $|3x-2y|-|2x-3y|$ 的值, 当 $x=-0.3$, $y=+0.2$.

18. 列出代数式, 表示两个数 x 与 y 的和的平方减去这两个数的平方的和.

19. 列出代数式, 表示两个数 x 与 y 的积除以这两个数的和.

20. 如果两个数的和是 26, 其中一个数用字母 x 来表示, 列出代数式表示这两个数的积.

21. 如果两个数的积是 48, 其中一个数用字母 x 来表示, 列出代数式表示这两个数的和.

22. 一个矩形的周长等于 50 厘米, 用一个字母的代数式表示这个矩形的面积.

23. 两个圆的半径的和是 15 厘米, 用一个字母的代数式表示这两个圆的面积的和.

24. 一个圆的半径是另一个圆的半径的 3 倍, 用一个字母的代数式表示这两个圆的周长的和.

25. 一个梯形的下底是上底的 2 倍, 高比上底小 3 厘米, 列出一个字母的代数式表示这个梯形的面积.

*26. $-a$ 一定是负数吗? 讨论它.

[提示: 分 $a>0$, $a=0$, $a<0$ 三种情况.]

*27. $a+b$ 的值一定大于 a 吗? 讨论它.

[提示: 分 $b>0$, $b=0$, $b<0$ 三种情况.]

*28．$a-b$ 的值一定小于 a 吗？什么时候 $a-b<a$？什么时候 $a-b=a$？什么时候 $a-b>a$？

*29．$3a$ 一定大于 a 吗？什么时候 $3a>a$？什么时候 $3a=a$？什么时候 $3a<a$？

*30．$\frac{a}{3}$ 一定小于 a 吗？什么时候 $\frac{a}{3}<a$？什么时候 $\frac{a}{3}=a$？什么时候 $\frac{a}{3}>a$？

*31．如 $|a|=a$，a 是怎样的数？

*32．如 $|a|=-a$，a 是怎样的数？

*33．如 $|a|=|b|$，a 一定等于 b 吗？如果 a 与 b 不相等时，它们是怎样关系的数？

*34．如 $|a|>|b|$，a 一定大于 b 吗？什么时候 $a>b$？什么时候 $a<b$？会不会 $a=b$ 呢？a 会不会等于零呢？

[提示：分 a 是正数和 a 是负数两种情况考虑.]

第三章　整　　式

在上一章里，我们已经学习了代数式．现在我们要进一步学习有关代数式的运算．在这一章里，我们先研究整式．

§3·1　整　　式

我们已经碰到过许多代数式了．例如 $3a$, $x+y$, a^2+b^2, $\frac{(a+b)h}{2}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{x-y}{x+y}$, $2(ab+ac+bc)$ 等等，都是代数式．在这些代数式里，包含的运算总不外乎加、减、乘、除和乘方等五种．这样的代数式叫做**有理代数式**，简称**有理式**．

有理式 $3a$, $x+y$, a^2+b^2, $\frac{(a+b)h}{2}$, $2(ab+ac+bc)$ 等，或者没有除法，或者虽然有除法但除数里不含有字母，这样的有理式叫做**有理整式**，简称**整式**．

有理式 $\frac{1}{a}$, $\frac{x-y}{x+y}$ 等，不但有除法，而且除数里还含有字母，这样的有理式叫做**有理分式**，简称**分式**．

§3·2　单　项　式

1．单项式的概念　看下面的一些整式：3, $-\frac{1}{2}$, a, $-3a^2$, $+\frac{1}{3}a^3b^2c$, $-\frac{1}{5}x^2y^3$．这些整式，有一个共同的特点，

就是没有加减运算．这里虽然有一些“＋”“－”号，但都是性质符号，不是加减法的运算符号．这些整式，叫做单项式；那就是说：

没有加减运算的整式叫做单项式．

象整式 $3x+5y$ 就不是单项式，因为这里有加法运算，象代数式 $\frac{b}{a}$ 也不是单项式，因为 $\frac{b}{a}$ 不是整式．

2．系数 在代数式 $3a$ 里，$3a$ 是数字因数 3 与字母因数 a 的积；在代数式 $-5x$ 里，$-5x$ 是数字因数 -5 与字母因数 x 的积；在代数式 $\frac{2}{3}a^2x$ 里，$\frac{2}{3}a^2x$ 是数字因数 $\frac{2}{3}$ 与字母部分的因数 a^2x 的积．我们把数字部分的因数叫做字母部分因数的**数字系数**，简称**系数**．

例如：在 $3a$ 里，3 是 a 的系数；

在 $-5x$ 里，-5 是 x 的系数；

在 $\frac{2}{3}a^2x$ 里，$\frac{2}{3}$ 是 a^2x 的系数．

注 1．代数式 a 就是 1 与 a 的积，所以 a 的系数是 1，同样的在 a^2x^3 里，a^2x^3 的系数也是 1；在 $-abc$ 里，abc 的系数是 -1，不要把 a 的系数说成是零，也不要把 $-abc$ 的系数说成是负号．

2．在将来，我们还可以把一个或几个字母作为主要字母，而把其他字母因数也作为系数或系数的一部分，例如我们可以把 x 作为主要字母，在 ax 里，将 a 看作 x 的系数，在 $-3a^2x^3$ 里，将 $-3a^2$ 看作 x^3 的系数；又如我们可以把 x 与 y 作为主要字母，在 $3ax^2y$ 里，将 $3a$ 看作 x^2y 的系数等．所以系数是对特定的字母来说的．在现在，我们还只讲数字的系数．

3．幂 在§1·18 里讨论有理数的乘方运算时，我们已讲过底数、指数这些名词了．对于含有字母的式子来说，这些名词仍具有同样的意义．例如 a^3 就叫做 a 的三次方，底数是

a，指数是 3，而 a^3 就是 $a\cdot a\cdot a$ 的简写．a^3 也叫做 a 的三次幂．同样，x^5 叫做 x 的五次方或五次幂，这里底数是 x，指数是 5，而 x^5 就是 $x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$ 的简写．一般说来，

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdots a}_{\text{一共有 } n \text{ 个}},$$

这里底数是 a，指数是 n，n 是任意自然数，a^n 读做 a 的 n 次方或 a 的 n 次幂．

注　a 也是一个幂，叫做 a 的一次幂或一次方，这里指数是 1．指数是 1 时，不必写出来．反过来说，不写出来的指数就是 1，不要说 a 没有指数，或者说它的指数是 0．

4．单项式的次数　看单项式 $-3x^4$，$2x^3$，a^2bc，$\frac{1}{2}x^3y$，-5，ax^2，$+\frac{1}{2}$，a．这些单项式里，有的只有一个字母，有的有两个字母，有的有三个字母，有的只有数字没有字母；各个字母的指数也有是 1 的，也有是 2 的，也有是 3 的或者是 4 的．我们把一个单项式里各个字母的指数的和叫做**这个单项式关于这些字母的次数**．例如 $-3x^4$ 是关于 x 的四次单项式，或者简称四次式；$2x^3$ 是关于 x 的三次单项式；a^2bc 是关于字母 a，b，c 的四次单项式(因为这里 a 的指数是 2，b 和 c 的指数各是 1，而它们的指数的和是 $2+1+1=4$)；$\frac{1}{2}x^3y$ 是关于 x 与 y 的四次单项式；ax^2 是关于 a 与 x 的三次单项式；a 是关于 a 的一次单项式．单项式 -5 与 $+\frac{1}{2}$，都只有数字没有字母，叫做零次单项式．

注　有时我们只把一个或几个字母作为主要字母，根据这几个字母的指数来计算单项式的次数．例如 ax^2 可以看做是关于 x 的二次单项式，而把 a 作为主要字母 x^2 的系数，又如 $3ax^2y$ 可以看做是关于 x 与 y 的三次单项式，$3a$ 可以当做 x^2y 的系数．

5．单项式的整理 单项式的整理，一般包括两个内容：

（i）排列各因数的前后次序：一个单项式可以包含几个因数，有数字的，也有字母的．因为字母表示的也是数，所以可根据乘法交换律，把这些因数的前后次序，互相调换．在习惯上，我们总把数字因数连同性质符号写在最前面，各个字母的前后次序，一般按照拉丁字母的前后次序（也就是拼音字母的次序）排列．

例 1．整理单项式：（1）$a3$；（2）$b^3 5a$；（3）$-x\frac{1}{3}a^2$．

【解】 整理后得：（1）$3a$；（2）$5ab^3$；（3）$-\frac{1}{3}a^2x$．

（ii）相同的字母因数，应该用指数表示成一个幂．

例 2．整理单项式：（1）$3aaa$；（2）$-3abababa$．

分析 根据相同因数可以写成幂的形式，aaa 可以写做 a^3．根据乘法交换律，$-3abababa$ 可以写成 $-3aaaabbb$，再根据相同因数可以写成幂的形式，$aaaa$ 可以写做 a^4，bbb 可以写做 b^3．

【解】 整理后得：（1）$3a^3$；（2）$-3a^4b^3$．

习 题 3·2

1．在下列代数式中，说明哪些是整式，哪些是分式，哪些是单项式：

（1）3；　（2）$-5xy$；　（3）$+\frac{1}{3}ax^5$；　（4）$a+b$；

（5）$\frac{3}{x}$；　（6）$2x^2+5$；　（7）$\frac{1}{3}x^2-7$；　（8）$\frac{a-b}{a+b}$；

（9）$-x^3+2x-5$；（10）$\frac{3b^2}{a}$．

2．说出下列各代数式里的系数：

（1）$3a$；　（2）$-5ab^3$；　（3）x；　（4）$-a^2$；

（5）$\frac{1}{2}a^2b^4$；　（6）$-\frac{2}{3}x^2y$；　（7）$0.3x$；　（8）$-1.5a^4$．

[解法举例：在 $3a$ 里，a 的系数是 3．]

3．说出下列代数式里各个字母的指数：

(1) $5a^2b^4x$;　　(2) $-7ax^4$;　　(3) $\frac{1}{3}x^2y^5$;　　(4) $6abcy^3$.

[解法举例：在 $5a^2b^4x$ 里，a 的指数是 2，b 的指数是 4，x 的指数是 1.]

4. 说出下列各单项式的次数：

(1) $-5a$;　　(2) a^2b^3;　　(3) $4x^2$;　　(4) $-\frac{1}{2}x^3y^5z$.

[解法举例：$-5a$ 是一次单项式.]

5. 整理下列各单项式：

(1) $a4$;　　(2) aba;　　(3) $5axxaa$;　　(4) $a\frac{1}{2}xbabx$.

§3·3 多 项 式

1. 多项式的概念 让我们来观察下面这些代数式：

$$a+3,\ \ x-y,\ \ -x^2+xy+3y^2,\ \ \frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{1}{2}x-5.$$

这些代数式里，因为都没有用字母做除数，所以它们都是整式，但是它们都含有加减运算符号，所以它们都不是单项式.

我们可以把这些代数式看做是几个单项式的代数和，例如：

$a+3$ 是 a 和 $+3$ 的代数和；

$x-y$ 是 x 和 $-y$ 的代数和；

$-x^2+xy+3y^2$ 是 $-x^2$，$+xy$ 和 $+3y^2$ 的代数和；

$\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{1}{2}x-5$ 是 $\frac{1}{3}x^3$，$-2x^2$，$+\frac{1}{2}x$ 和 -5 的代数和.

我们把**几个单项式的代数和叫做多项式.**

2. 多项式的项 在多项式里的每一个单项式，叫做这个多项式的项. 根据多项式里所含有的项的个数，就叫这个多项式是几项式. 例如，在上面这些多项式里，

$a+3$ 和 $x-y$ 都是二项式；

$-x^2+xy+3y^2$ 是三项式；

$\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{1}{2}x-5$ 是四项式.

注意 多项式中的项，是包括它前面的正负号的. 例如 $x-y$ 的两项是 x 和 $-y$，不能说是 x 和 y.

3. 多项式的次数 在二项式 $a+3$ 里，第一项 a 的次数是 1，我们把它叫做一次项，$+3$ 没有字母，我们把它叫做常数项（或者叫做零次项），这里次数最高的项是一次项.

在三项式 $3x^2-5x-1$ 里，第一项 $3x^2$ 的次数是 2，我们把它叫做二次项，$-5x$ 是一次项，-1 是常数项，这里次数最高的项是二次项.

在四项式 $-3x^3+2x^2-\frac{1}{2}x+5$ 里，次数最高的项是三次项 $-3x^3$.

我们把一个多项式里次数最高的项的次数，叫做这个多项式的次数. 多项式的次数是几的，就叫做几次多项式.

例如：$a+3$ 是一次式；

$3x^2-5x-1$ 是二次式；

$-3x^3+2x^2-\frac{1}{2}x+5$ 是三次式.

又如：$x^3-x^2y+xy^2-y^3$，它的四项的次数都是 3，它是关于 x 与 y 的三次式.

4. 多项式的整理 为了便于运算，通常我们总要把一个多项式，按照一定的次序，整理成整齐而简洁的形式. 多项式的整理，一般包括两个内容.

(i) 排幂：我们来看多项式

$$x^2-2-5x+3x^3,$$

它是四个单项式 x^2, -2, $-5x$, $+3x^3$ 的代数和，这里第一项的次数是2，第二项是常数项(或者说它的次数是0)，第三项的次数是1，第四项的次数是3. 为了把它整理成整齐形式，通常我们应该按照各项次数从大到小或者从小到大的顺序，把它们重行排列起来. 这种整理方法叫做排幂. 例如:

多项式 $x^2-2-5x+3x^3$ 可以重行排列成

$$3x^3+x^2-5x-2 \tag{1}$$

或者

$$-2-5x+x^2+3x^3 \tag{2}$$

两种形式.

注 在有理数这一章里，我们已经知道，在加法运算中，可以交换加数的前后次序(加法交换律). 代数式里的字母都表示数，每个单项式表示的也就是数，所以我们可以象有理数加法一样，交换多项式里各项的先后次序.

我们看到，在(1)中，各项是按照字母 x 的幂的指数从大到小的顺序来排列的，这种排列方法，叫做按这个字母的**降幂排列**；在(2)中，各项是按照字母 x 的幂的指数从小到大的顺序来排列的，这种排列方法，叫做按这个字母的**升幂排列**.

例1. 依照 x 的降幂排列，整理下列两个多项式:

(1) $x^2-2-5x^4+3x^3$;

(2) $3-4x+5x^6-4x^5+x^2-x^3$.

【解】 整理后，得

(1) $-5x^4+3x^3+x^2-2$;

(2) $5x^6-4x^5-x^3+x^2-4x+3$.

注意 多项式中的项，是包括它前面的性质符号的. 在排幂时，每一项的性质符号仍须看作是这一项的一个部分而一起移动. 如果原来的第一项省略掉性质符号"+"，搬到后面时就要补上这个"+"号；如果原来的中间项搬到第一项而性质符号是正的，也可以省略掉这一"+"号，但性质符号"−"不能省略.

例 2. 按 a 的降幂排列整理下列多项式:

(1) $a^3-3ab^2+5b^3-6a^2b$; (2) $-3ab+b^2-3a^2$.

【解】 整理后,得

(1) $a^3-6a^2b-3ab^2+5b^3$; (2) $-3a^2-3ab+b^2$.

例 3. 按 x 的升幂排列整理下列多项式:

(1) x^2-3x^3+5x-7; (2) $y^3-3x^2y+2xy^2+x^3$.

【解】 整理后,得

(1) $-7+5x+x^2-3x^3$; (2) $y^3+2xy^2-3x^2y+x^3$.

(ii) 合并同类项: 我们来看多项式

$$3a^2b-5ab^2+3a^2b+ab^2+a^2b^2.$$

它是五个单项式 $3a^2b$, $-5ab^2$, $+3a^2b$, $+ab^2$, $+a^2b^2$ 的代数和. 这些单项式都只含有两个字母,就是 a 和 b, 并且:

第一项 $3a^2b$ 和第三项 $3a^2b$, a的幂的指数都是 2, b 的幂的指数都是 1, 系数也相同,这两个项是完全一样的.

第二项 $-5ab^2$ 和第四项 ab^2. a 的幂的指数都是 1, b 的幂的指数都是 2, 这二项里只有系数不相同.

多项式里具有这种性质的两个或几个项, 叫做同类项. 例如第一项 $3a^2b$ 和第三项 $3a^2b$ 是同类项, 第二项 $-5ab^2$ 和第四项 ab^2 也是同类项. 一般地说,

多项式里的某些项,如果彼此完全没有差别,或者彼此只有系数不同,那末这些项就叫做同类项.

常数项和常数项也是同类项.

注意 多项式里的两个项虽然所含字母相同, 但是相同字母的幂的指数不同, 就不是同类项. 例如 $3a^2b$ 和 $3ab^2$ 就不是同类项, $3a^2b$ 和 $3a^2b^2$ 也不是同类项.

在一个多项式里, 同类项可以根据乘法对于加法的分配律,把它们合并成一项,

例如： $$3a^2b+3a^2b=3\times a^2b+3\times a^2b$$
$$=(3+3)\times a^2b=6a^2b;$$
$$-5ab^2+ab^2=-5\times ab^2+1\times ab^2$$
$$=(-5+1)\times ab^2=-4ab^2;$$

因此，根据加法的交换律和结合律，上面所提出的这个多项式可以写成

$$(3a^2b+3a^2b)+(-5ab^2+ab^2)+a^2b^2.$$

再合并同类项，把它化简成

$$6a^2b-4ab^2+a^2b^2.$$

把多项式里的同类项合并成一项，叫做合并同类项，从上面的例子得到**合并同类项法则**：合并同类项，只要把系数相加，所得的和作为系数(字母部分连同它们原来的指数仍旧不变).

例 4. 整理下列多项式：

$$5x^4-3x^2+6-7x^3+12x^4+10x^3+2x^2-3x^3+7+10x.$$

【解】 先按 x 的降幂排列，再合并同类项：

$$5x^4-3x^2+6-7x^3+12x^4+10x^3+2x^2-3x^3+7+10x$$
$$=5x^4+12x^4-7x^3+10x^3-3x^3-3x^2+2x^2+10x+6+7$$
$$=17x^4+0\cdot x^3-x^2+10x+13$$
$$=17x^4-x^2+10x+13.$$

注意 1. 为了便于整理，我们可以在同类项下面用横线记号标明，这样就不至于重复或遗漏.

2. $-7x^3+10x^3-3x^3=(-7+10-3)x^3=0\cdot x^3=0$，这一项没有了，因为 0 乘任何数等于 0.

例 5. 整理下列多项式：

$$2a^4-8a^2b^2-ab^3+5a^3b+3a^4+6ab^3+5b^4+8a^2b^2.$$

【解】 按 a 的降幂排列，再合并同类项：

$$\text{原式}=2a^4+3a^4+5a^3b-8a^2b^2+8a^2b^2-ab^3+6ab^3+5b^4$$
$$=5a^4+5a^3b+5ab^3+5b^4.$$

说明　$-8a^2b^2+8a^2b^2=0$，这一项没有了。

习　题　3·3

1．说明下列多项式是几项式，是几次式，并指出它的次数最高的项和常数项：

(1) $3a^2-5a-7$;　　(2) $x^4-3x^3+2x^2-56$;

(3) $7-y-y^2$;　　(4) $3a^3+5a^5-7a^2+8$.

2．整理下列多项式，按 a 或 x 的降幂排列：

(1) $3+a$;　　(2) $5x-x^2-3$;

(3) $5a-7a^2+16-14a^4$;　　(4) $a^3b-5a^2b^2+a^4+3ab^3-b^4$;

(5) $x^3-x^2y+y^3-xy^2$.

3．合并下列多项式里的同类项：

(1) a^3+a^3;　　(2) $5a-3a+7a$;

(3) $a^2b-3a^2b+2a^2b$;　　(4) $-3x^2y+2x^2y+3xy^2-2xy^2$;

(5) $\frac{2}{3}a^2-6a^3+5a-\frac{1}{4}+5a^3-\frac{1}{2}-\frac{4}{3}a^2$.

4．整理下列多项式：

(1) $3a-2x+5a-7x$;

(2) $7a^2+3a+8-5a^2-3a-8$;

(3) $3a+5b-3c-3a+7b-6c$;

(4) $a^2-3a+8-3a^2+5a-7$;

(5) $x^4-x+x^2+3+x^3-3x^2+1$;

(6) $-10x^2+13x^3-2+3x^4-4x-3+x^3$.

5．求当 $x=0.1$ 时，下列各式的值：

(1) $3x^2+5x-\frac{1}{2}x^2-4\frac{1}{2}x+0.5-\frac{1}{2}x$;

(2) $\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{2}{3}x^3+3x^2+5x-4x+7$.

[提示：先整理多项式，再行代入.]

§3·4 整式的加减法

1．单项式的加法 应用上面所讲过的合并同类项的法则，我们很容易做关于单项式的加法．举例说明如下：

例 1． 求下面各题里的这些单项式的和：

(1) $3a,\ -5a$;　　　　(2) $3a,\ -4b,\ -5a$;

(3) $3a,\ -4b$.

【解】

(1) $3a$ 和 $-5a$ 相加，它们的和就是

$$3a+(-5a).$$

把它写成代数和的形式，再合并同类项，得

$$3a+(-5a)=3a-5a=-2a.$$

(2) $3a+(-4b)+(-5a)$

$$=3a-4b-5a=3a-5a-4b=-2a-4b.$$

(3) $3a+(-4b)=3a-4b$.

从上面的例子可以看到，做单项式的加法，有下面的**单项式的加法法则**：几个单项式相加，只要把这些单项式连结起来写成代数和的形式，再合并同类项．

注　把几个代数式相加时，我们把这些代数式都叫做加式．

例 2． 做下面的加法：

(1) $(-3ab)+(-2ab)+(+5ab)$;

(2) $\left(-\frac{1}{2}x\right)+\left(-\frac{1}{3}x\right)+\left(+\frac{1}{2}x\right)+\left(+\frac{1}{3}x^2\right)$.

【解】

(1) $(-3ab)+(-2ab)+(+5ab)$

$$=-3ab-2ab+5ab=0.$$

(2) $\left(-\frac{1}{2}x\right)+\left(-\frac{1}{3}x\right)+\left(+\frac{1}{2}x\right)+\left(+\frac{1}{3}x^2\right)$

$$=\underline{-\frac{1}{2}x}-\frac{1}{3}x\underline{+\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}x^2=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x^2=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x.$$

注意 在(1)中合并同类项以后 ab 的系数是 0，所以结果是 0. 在(2)中 $-\frac{1}{3}x$ 和 $\frac{1}{3}x^2$ 不是同类项，所以不能再合并. 最后结果用 x 的降幂排列，这样可以避免第一项的系数是负数. 但是把 $-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x^2$ 当做最后的结果也是可以的.

习　题　3·4(1)

1．做下面的加法:

(1) $3a+(+7a)$;　　(2) $(-3a)+(-7a)$;

(3) $3x+(-7x)$;　　(4) $(-3x)+(+7x)$;

(5) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x$;　　(6) $\left(-\frac{1}{3}a\right)+\left(+\frac{1}{2}a\right)$.

2．求下列各式的和:

(1) $3x^2$, $-5x^2$;　　(2) $-3a^3$, $-5a^3$;

(3) $-8a^2b^3$, $+9a^2b^3$;　　(4) x^2y, $-x^2y$;

(5) $\frac{2}{3}a^2x^2$, $-\frac{3}{4}a^2x^2$;　　(6) $0.3a^2b^3c$, $-\frac{1}{3}a^2b^3c$.

3．计算:

(1) $(+3a)+(-5b)$;　　(2) $(-5a^2)+(-5a)$;

(3) $(-3a^2b)+(-5ab^2)$;　　(4) $\left(+\frac{1}{2}a^2b^3\right)+\left(+\frac{1}{3}a^3b^2\right)$;

(5) $(-3a^2x^3)+(-5a^2x)$;　　(6) $(-3xy)+(+5ay)$.

4．计算:

(1) $(+3a)+(-5a)+(-7a)$;

(2) $(-7a^2)+(+5a^2)+(+2a^2)$;

(3) $(-7a^2b^3)+(-11a^2b^3)+(-14a^3b^2)$;

(4) $(-5a^2x^3)+(+5a^3x^2)+(-3a^3x^2)$;

(5) $(+7abx^2)+(-4ab^2x)+(-3a^2bx)$;

(6) $(-3a^2x^2y^3)+(+5a^2x^3y^2)+(-3a^3x^2y^2)$.

5. 计算:

(1) $(+3a)+(-5a)+(-7a)+(-31a)$;

(2) $\left(+\frac{1}{2}ab\right)+\left(-\frac{1}{3}ab\right)+\left(+\frac{1}{4}ab\right)+\left(-\frac{1}{5}ab\right)$;

(3) $\left(+\frac{2}{3}x^2y\right)+\left(-\frac{3}{2}x^2y\right)+\left(-\frac{2}{3}xy^2\right)+\left(+\frac{1}{4}xy^2\right)$;

(4) $5a^3x^2+(-3a^2x^3)+(+5a^3x^2)+(-3a^2x^3)$;

(5) $\left(-\frac{1}{2}abx^2\right)+\left(-\frac{1}{3}abx\right)+\left(-\frac{1}{4}abx^2\right)+\left(-\frac{1}{3}ab^2x\right)$;

(6) $(-2a^2b^3xy)+(-3a^2b^3xy)+(-5a^3b^2xy)+(-6a^3b^2xy)$.

2. 单项式的减法 在有理数的减法里，我们知道，减去一个数，等于加上它的相反的数. 用字母来表示，就是

$$a-(+b)=a+(-b), \quad a-(-b)=a+(+b).$$

所以做单项式的减法，只需应用下面的**单项式的减法法则**：减去一个单项式，只要把这个单项式的性质符号改成相反的符号，再做加法.

注 一个代数式减去另一个代数式，我们把第一个代数式叫做被减式，第二个代数式叫做减式.

例 3. 做下列减法:

(1) $5a-(+3a)$; (2) $5a-(+8a)$;

(3) $(-5a)-(+3a)$; (4) $(-5a)-(-8a)$;

(5) $(-5a^3)-(-7a^3)$; (6) $(+a^2b^3)-(-a^2b^3)$.

【解】

(1) $5a-(+3a)=5a+(-3a)=5a-3a=2a$;

(2) $5a-(+8a)=5a+(-8a)=5a-8a=-3a$;

(3) $(-5a)-(+3a)=(-5a)+(-3a)$
$=-5a-3a=-8a$;

(4) $(-5a)-(-8a)=(-5a)+(+8a)$
$=-5a+8a=+3a$;

(5) $(-5a^3)-(-7a^3)=(-5a^3)+(+7a^3)$

$$=-5a^3+7a^3=2a^3;$$

(6) $(+a^2b^3)-(-a^2b^3)=a^2b^3+(+a^2b^3)$

$$=a^2b^3+a^2b^3=2a^2b^3.$$

例 4. 计算:

(1) $3a-(+5b)$; (2) $5a-(-3b)$;

(3) $3a^2-(+2a)$; (4) $3a^2-(-3a)$.

【解】

(1) $3a-(+5b)=3a+(-5b)=3a-5b$;

(2) $5a-(-3b)=5a+(+3b)=5a+3b$;

(3) $3a^2-(+2a)=3a^2+(-2a)=3a^2-2a$;

(4) $3a^2-(-3a)=3a^2+(+3a)=3a^2+3a$.

例 5. 计算:

(1) $3a^2-5a+(-7a^2)$;

(2) $(+a^2b)+(-ab^2)-(-2a^2b)$;

(3) $\frac{1}{2}x^2y^3+\frac{1}{3}x^3y^2-\left(-\frac{1}{3}x^2y^3\right)+\left(-\frac{1}{2}x^3y^2\right)$;

(4) $(+5a)+(-3b)+(+0.3c)+(-3a)+(+3b)+0.7c$.

【解】

(1) $3a^2-5a+(-7a^2)=3a^2-5a-7a^2=-4a^2-5a$;

(2) $(+a^2b)+(-ab^2)-(-2a^2b)$

$$=+a^2b-ab^2+2a^2b=3a^2b-ab^2;$$

(3) $\frac{1}{2}x^2y^3+\frac{1}{3}x^3y^2-\left(-\frac{1}{3}x^2y^3\right)+\left(-\frac{1}{2}x^3y^2\right)$

$$=\frac{1}{2}x^2y^3+\frac{1}{3}x^3y^2+\frac{1}{3}x^2y^3-\frac{1}{2}x^3y^2$$

$$=\frac{5}{6}x^2y^3-\frac{1}{6}x^3y^2;$$

(4) $(+5a)+(-3b)+(+0.3c)$
$$+(-3a)+(+3b)+0.7c$$
$$=5a-3b+0.3c-3a+3b+0.7c=2a+c.$$

习 题 3·4 (2)

1. 计算:

(1) $(-5a)-(-7a)$; (2) $(+3a)-(+8a)$;

(3) $(+5ab)-(-6ab)$; (4) $(-3a^3)-(-3a^3)$;

(5) $\left(-\frac{1}{2}a^2\right)-\left(-\frac{1}{3}a^2\right)$; (6) $a^2b^3c-2a^2b^3c$.

2. 做下列减法:

(1) $(+5ab)-(-6ac)$; (2) $(-5a)-(+7a^2)$;

(3) $(-4ab^2)-(+4a^2b)$; (4) $(-9x^2)-(+9y^2)$;

(5) $(+3a^2b^3)-(+3a^3b^2)$; (6) $3a^2b^2c-(-3ab^2c^2)$.

3. 计算:

(1) $3a+(+5a)-(-3a)$; (2) $5a^2-(+6a^2)+(-3a^2)$;

(3) $3a^2b+2a^2b-(+6a^2b)$;

(4) $(-3a^2)-(+3a^2)-(-6a^2)$;

(5) $(-5a^3)+(-3a^2)-(-3a)$;

(6) $3ab-(-5ab)+(-7ac)$.

4. 计算:

(1) $3a-(+5a)-(-7a)$; (2) $(-5a)-(-4a)+(+7a)$;

(3) $(+3a^2)+(-5a^2)-(-7a^2)$;

(4) $\frac{1}{2}a^2b^3-\left(-\frac{1}{3}a^2b^3\right)-\left(-\frac{1}{4}a^2b^3\right)$.

5. 计算:

(1) $(-8x^2y)+(+10x^2y)-(-3xy^2)+(-5xy^2)$;

(2) $(-7y^2)+(-4y)-(-y^2)-(+5y)+(-8y^2)$.

3. 多项式的加法和减法 根据加法结合律,我们知道:
$$a+(b+c+d)=a+b+c+d.$$
根据减法的运算性质,我们还知道:

$$a-(b+c+d)=a-b-c-d.$$

所以做多项式的加法和减法，可以应用下面的**多项式加减法法则**:

(i) 加上一个多项式，可以依次加上这个多项式的各项，

(ii) 减去一个多项式，可以改变减式各项的符号，把它们依次加在被减式上.

例 6. 做下面的加法:

(1) $(3a^3+2a^2+5a-7)+(-2a^3+3a^2-5a+4)$;

(2) $(3a+2b-3c)+(5a-3b+2c)$.

【解】

(1) $(3a^3+2a^2+5a-7)+(-2a^3+3a^2-5a+4)$

$=3a^3+2a^2+5a-7-2a^3+3a^2-5a+4$

$=3a^3-2a^3+2a^2+3a^2+5a-5a-7+4$

$=a^3+5a^2-3$;

(2) $(3a+2b-3c)+(5a-3b+2c)$

$=3a+2b-3c+5a-3b+2c$

$=3a+5a+2b-3b-3c+2c=8a-b-c.$

例 7. 计算:

(1) $(3a^2-5a)-(5a^2-7a)$;

(2) $(-3a+5b)-(-5a+7b)$;

(3) $(3a+2b-3c)-(5a-2b+3c)$;

(4) $3-(3a^2-5a-7)$;

(5) $(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$;

(6) $(x^3-3x^2y+3xy^2)-(x^3-3x^2y-3xy^2-y^3)$.

【解】

(1) $(3a^2-5a)-(5a^2-7a)=3a^2-5a-5a^2+7a$

$=-2a^2+2a$;

(2) $(-3a+5b)-(-5a+7b)=-3a+5b+5a-7b$
$$=2a-2b;$$

(3) $(3a+2b-3c)-(5a-2b+3c)$
$$=3a+2b-3c-5a+2b-3c$$
$$=-2a+4b-6c;$$

(4) $3-(3a^2-5a-7)=3-3a^2+5a+7$
$$=-3a^2+5a+10;$$

(5) $(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$
$$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$$
$$=-6a^2b-2b^3;$$

(6) $(x^3-3x^2y+3xy^2)-(x^3-3x^2y-3xy^2-y^3)$
$$=x^3-3x^2y+3xy^2-x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$=6xy^2+y^3.$$

例 8. 计算:

(1) $(3a+5b)+(5a-4b)-(2a-3b)$;

(2) $(-a^3+3a^2-7a+5)+(5a^2-6a)-(a^3-4a+7)$;

(3) $\left(\frac{1}{3}a^3-2a^2-\frac{1}{2}a-6\right)-\left(\frac{1}{3}a^2-5\right)$
$$-\left(\frac{1}{2}a^3-4a-7\right);$$

(4) $(0.3x^3-x^2y+xy^2-y^3)-(-0.5x^3-x^2y+0.3xy^2)$
$$+(1.2x^3-1.2y^3).$$

【解】

(1) $(3a+5b)+(5a-4b)-(2a-3b)$
$$=3a+5b+5a-4b-2a+3b=6a+4b;$$

(2) $(-a^3+3a^2-7a+5)+(5a^2-6a)-(a^3-4a+7)$
$$=-a^3+3a^2-7a+5+5a^2-6a-a^3+4a-7$$
$$=-2a^3+8a^2-9a-2;$$

$$(3)\ \left(\frac{1}{3}a^3-2a^2-\frac{1}{2}a-6\right)-\left(\frac{1}{3}a^2-5\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}a^3-4a-7\right)$$

$$=\frac{1}{3}a^3-2a^2-\frac{1}{2}a-6-\frac{1}{3}a^2+5-\frac{1}{2}a^3+4a+7$$

$$=-\frac{1}{6}a^3-\frac{7}{3}a^2+\frac{7}{2}a+6;$$

$$(4)\ (0.3x^3-x^2y+xy^2-y^3)-(-0.5x^3-x^2y+0.3xy^2)$$

$$+(1.2x^3-1.2y^3)$$

$$=0.3x^3-x^2y+xy^2-y^3+0.5x^3+x^2y$$

$$-0.3xy^2+1.2x^3-1.2y^3$$

$$=2x^3+0.7xy^2-2.2y^3.$$

习　题　3·4(3)

1．计算:

(1) $(2x^3-3x^2+6x+5)+(x^3-6x+9)$;

(2) $(2a^3+5a^2+3a-1)+(3-8a+2a^2-6a^3)$;

(3) $(+3a^2+b^2-5ab)+(4ab-b^2+7a^2)$;

(4) $\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{6}xy+\frac{3}{4}y^2\right)+\left(\frac{5}{12}x^2-\frac{4}{3}xy-\frac{7}{4}y^2\right)$

$$+\left(\frac{1}{2}x^2-y^2+\frac{5}{4}xy\right).$$

2．做下列加法:

(1) $(3a^3-5a^2-a+4)+(-2a^4-5a^2+a-3)+(-3a^3+5a-7)$;

(2) $(-3a^2-5b^2+3c^2)+\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}b^2-3c^2\right)$

$$+\left(1\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}b^2+\frac{1}{4}c^2\right);$$

(3) $(-0.3x^3y+0.5x^2y^2+3.1xy^3+0.4y^4)+(-1.2x^4-0.13x^3y$
$+0.36xy^3+3y^4)+(3.2x^4-3.3x^3y+2.2x^2y^2-y^4)$;

(4) $(3a^2b-5ab^2+3b^3)+(a^3-3a^2b-5ab^2-2b^3)$
$+(-a^3+10ab^2-b^3)$.

3．做下列减法：

(1) $(6a+10b)-(2a+13b)$;

(2) $(2a-2b+4c)-(-2a-6b+4c)$;

(3) $(3a^2-5a+7)-(-3a^2-5a+7)$;

(4) $(3a^2-5ab+6b^2)-(3a^2+5ab-6b^2)$;

(5) $(ax+bx+ay+by)-(ax-bx-ay+by)$;

(6) $(-3x^3-5x^2y+3xy^2-y^3)-(-2x^3+5x^2y-2y^3)$.

4．计算：

(1) $(3a+5b)+(5a-7b)-(2a-4b)$;

(2) $(a^3-2a^2+a-7)-(5a^2-7a+8)+(a^3-3a^2-5)$;

(3) $(-x^3-3x^2+7x-8)-(3x^3-2x^2-5x+4)-(-x^3-2x^2+2)$;

(4) $(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)-(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)-(6x^2y)$.

在做多项式的加减法时，为了便于合并同类项，我们也可以用直式来进行演算.

例 9．计算：

$$(10x^3-6x^2+5x-4)+(9x^3-2x^2+4x+2).$$

【解】 用直式演算：

$$\begin{array}{r}10x^3-6x^2+5x-4\\ 9x^3-2x^2+4x+2\\ \hline 19x^3-8x^2+9x-2\end{array}\,(+$$

$$\therefore\quad (10x^3-6x^2+5x-4)+(9x^3-2x^2+4x+2)$$
$$=19x^3-8x^2+9x-2.$$

注意 用直式进行加法演算时，首先要把第一个加式按照某一字母的降幂(或升幂)整理排列，其他的加式排在下面，要注意对齐同类项，这样，合并同类项时只要注意进行直行的系数的加法，写出对应的同类项来就是了.

用直式进行加法演算时，最后仍应列出横式来.

例 10. 计算：

$$(8x^3-6x^2+5x-12)+(-4x^2+3x-8)$$
$$+(-5x^3+5x+7).$$

【解】 用直式演算：

$$\begin{array}{rrrrl}
8x^3 & -6x^2 & +5x & -12 & \\
 & -4x^2 & +3x & -\ 8 & \\
-5x^3 & & +5x & +\ 7 & \\
\hline
3x^3 & -10x^2 & +13x & -13 & (+
\end{array}$$

$$\therefore\quad (8x^3-6x^2+5x-12)+(-4x^2+3x-8)$$
$$+(-5x^3+5x+7)$$
$$=3x^3-10x^2+13x-13.$$

注意　用直式进行加法演算，如果有一些加式缺少某些幂的项时，可以空出相应地位，务使同类项上下对齐，这样才便于演算.

例 11. 计算：$(3a^2b-5a^3+b^3)+(6a^3-7ab^2-2b^3)$
$+(3a^3+5a^2b+7ab^2)$.

【解】

$$\begin{array}{rrrrl}
-5a^3 & +3a^2b & & +\ b^3 & \\
6a^3 & & -7ab^2 & -2b^3 & \\
3a^3 & +5a^2b & +7ab^2 & & \\
\hline
4a^3 & +8a^2b & & -\ b^3 & (+
\end{array}$$

$$\therefore\quad (3a^2b-5a^3+b^3)+(6a^3-7ab^2-2b^3)$$
$$+(3a^3+5a^2b+7ab^2)$$
$$=4a^3+8a^2b-b^3.$$

例 12. 计算：

$$\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{4}a+\frac{1}{5}\right)$$
$$+\left(1\frac{1}{4}a^2-0.3a+1\right).$$

【解】

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a-\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3}a^2-\frac{1}{4}a+\frac{1}{5} \\ 1\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{10}a+\ 1 \\ \hline 2\frac{1}{12}a^2-\frac{13}{60}a+\frac{19}{20} \end{array}(+$$

$$\therefore\quad \left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{4}a+\frac{1}{5}\right)$$

$$+\left(1\frac{1}{4}a^2-0.3a+1\right)$$

$$=\frac{25}{12}a^2-\frac{13}{60}a+\frac{19}{20}.$$

例 13. 计算：$(3+x^2-4x)-(5x-8+3x^2)$。

【解】

$$\begin{array}{r} x^2-4x+\ 3 \\ 3x^2+5x-\ 8 \\ \hline -2x^2-9x+11 \end{array}(-$$

$$\therefore\quad (3+x^2-4x)-(5x-8+3x^2)=-2x^2-9x+11.$$

注意 同加法的直式写法一样，先要把被减式按照一个字母的降(或升)幂进行排列，再将减式的各项写在被减式的下面，使同类项互相对齐，然后在心中把减式各项的性质符号换成相反符号后，按加法合并同类项．最后还必须写出一个横式表示结果．

例 14. 计算：$(3x^4-2x^2+x-3)-(4x^3-x^2+5)$。

【解】

$$\begin{array}{rrrrr} 3x^4 & & -2x^2 & +x & -3 \\ & 4x^3 & -\ x^2 & & +5 \\ \hline 3x^4 & -4x^3 & -\ x^2 & +x & -8 \end{array}(-$$

$$\therefore\quad (3x^4-2x^2+x-3)-(4x^3-x^2+5)$$

$$=3x^4-4x^3-x^2+x-8.$$

例 15. 计算:

$(5a^4+2a^2b^2+ab^3-3a^3b)-(5a^3b-2ab^3+3a^2b^2+b^4)$.

【解】

$$\begin{array}{rrrrrl} 5a^4 & -3a^3b & +2a^2b^2 & +ab^3 & & \\ & +5a^3b & +3a^2b^2 & -2ab^3 & +b^4 & (- \\ \hline 5a^4 & -8a^3b & -a^2b^2 & +3ab^3 & -b^4 & \end{array}$$

$\therefore$ 差$=5a^4-8a^3b-a^2b^2+3ab^3-b^4$.

习 题 3·4(4)

用直式进行演算:

1. $(2x^3-16+x^4-2x)+(x+2)+(6x^2+8x+7x^4)$.
2. $(2x-14x^3-7x^2+5)+(5+9x^2-2x^3+x)$
   $+(-4x^2-3+2x^3+5x)$.
3. $(2x^3-2x^2+x^4)+(2x^2+3x^4-4)+(-3x^3-3x-5)$.
4. $(12ab-6a^2+10b^2)+(2a^2-3ab+2b^2)+(-8ab+a^2-5b^2)$.
5. $(x^2-3xy-y^2)+(x^2+2xy+y^2)+(-2x^2-xy)$.
6. $\left(\frac{2}{3}x^2+xy+\frac{3}{2}y^2\right)+\left(-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}xy-\frac{1}{2}y^2\right)+(x^2-y^2)$.
7. $\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}x-5\right)+\left(-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)$
   $+\left(x^3-\frac{1}{3}\right)$.
8. $(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)+(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4)$.
9. $(-0.3a^3-0.2a^2-0.1a-0.5)+(-0.2a^3-0.3a^2+0.4a-0.5)$
   $+(-0.5a^3+0.5a^2-0.5a+1)$.
10. $\left(-0.3a^2+\frac{1}{2}ab-0.4b^2\right)+\left(\frac{1}{3}a^2-0.5ab+\frac{1}{3}b^2\right)$.
11. $(4x+2y-3z)-(4x-2y+3z)$.
12. $(4x^3+x^2-5x-12)-(-x^3+x^2-4x+11)$.
13. $(12x^7-8x^5+4x^4-12x^3)-(-3x^6+2x^4-x^3+3x^2)$.
14. $(a^2-ab+2b^2)-(a^2+ab-2b^2)$.
15. $(8-6x+4x^3+5x^2)-(3x^2-3-2x^3-7x)$.

16. $(2a^3-6a^2b+6ab^2-2b^3)-(a^3-7a^2b-3b^3)$.

17. $(a^3-b^3)-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$.

18. $\left(\frac{3}{2}a^3-\frac{3}{4}a+\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{8}{15}a^3-\frac{1}{10}a^2-\frac{2}{9}\right)$.

§3·5 去括号与添括号

1. 去括号 在多项式的加减法计算中，已经实施了去括号. 因此，去括号的法则，就可以从加减法的法则中总结出来.

例如：依照加法法则，

$$a+(b-c+d)=a+b-c+d;$$

又如：依照减法法则，

$$a-(b-c+d)=a-b+c-d.$$

由此，我们得到下面的**去括号法则**:

(i) 如果一个括号前面是"+"号，可把括号和括号前面的"+"号一并去掉，括号里面的各项一律不变，但原来括号里面的第一项如果省略掉正号的，要补上去.

(ii) 如果一个括号前面是"−"号，把括号和括号前面的"−"号一并去掉时，括号里面的各项，原来带有"+"号的改做"−"号，原来带有"−"号的，改做"+"号.

例 1. 去掉下面各式里的括号，并进行化简：

(1) $7a+(a+2b)+(-3a-b)+(+4a-3b)$;

(2) $2x-(x+3y)-(-x-y)-(+x-y+2z)$
$\quad -(2x-3y+4z)$.

【解】

(1) $7a+(a+2b)+(-3a-b)+(+4a-3b)$
$=7a+a+2b-3a-b+4a-3b=9a-2b$;

(2) $2x-(x+3y)-(-x-y)$
$$-(+x-y+2z)-(2x-3y+4z)$$
$$=2x-x-3y+x+y-x+y-2z-2x+3y-4z$$
$$=-x+2y-6z.$$

例 2. 去括号并化简:

(1) $a+\{3b+[2b-(5c+3a)]\}$;

(2) $3x^3-\{5x^2-[2x-(3x^2-3x+x^3)]-5x\}$.

【解】

(1) $a+\{3b+[2b-(5c+3a)]\}$
$$=a+\{3b+[2b-5c-3a]\}$$
$$=a+\{3b+2b-5c-3a\}$$
$$=a+\{5b-5c-3a\}$$
$$=a+5b-5c-3a=-2a+5b-5c;$$

(2) $3x^3-\{5x^2-[2x-(3x^2-3x+x^3)]-5x\}$
$$=3x^3-\{5x^2-[2x-3x^2+3x-x^3]-5x\}$$
$$=3x^3-\{5x^2-[5x-3x^2-x^3]-5x\}$$
$$=3x^3-\{5x^2-5x+3x^2+x^3-5x\}$$
$$=3x^3-\{x^3+8x^2-10x\}$$
$$=3x^3-x^3-8x^2+10x=2x^3-8x^2+10x.$$

说明　有几层括号的，先去里层括号，再去外层的；在去掉一层括号后，如果括号里可以先行合并同类项的，应该先行合并，这样就比较简便.

习　题　3·5(1)

去下列各式的括号并化简:

1. $5a+(4b-3a-2c)$.
2. $6x-(5y-4x+3z)$.
3. $4xy+(x^2+3xy-2y^2)-(x^2-5xy+y^2)$.

4. $5a+\{9a-[7a-(3a-5b)]\}$.

5. $a+2b-[c+2a-(3b+2c)]+c$.

6. $x-\{y-2z+[3x-(y+2z)+5y]\}$.

7. $-3a-\{3x+[3c-(2y+4x+5a)]\}$.

8. $2a^3-[3a^2+(2a-5)+3a]$.

9. $9x-\{15y-[4x-(11y-2x)-10y]+2x\}$.

10. $x-[y+z-x-(x+y)-z]-(2x+y-3z)$.

11. $x+[4x-(13y-4x)]-[4x-(9x-7y)]$.

12. $x^3-[7x^3-2-2x^2+2x-(4x^3-2x-2x^2-14)]-(2x^3-8x^2)$.

2. 添括号 有时我们也需要把一个多项式的几个项用括号括起来，表示这几项要先行合并，这个手续叫做添括号. 根据去括号的法则可以得到下面的**添括号的法则**:

(i) 在添括号的时候，如果要在括号前面用一个"+"号，那末括起来的各项的性质符号，不必变动.

(ii) 在添括号的时候，如果要在括号前面用一个"−"号，那末括起来的各项的性质符号，都要改为相反的符号.

例 3. 把下面各式的后面两项用括号括起来，并在括号前面用一个"+"号:

(1) $3x+5y-3z$;　　　　(2) $3x-5y+3z$.

【解】 (1) $3x+5y-3z=3x+(+5y-3z)$;

(2) $3x-5y+3z=3x+(-5y+3z)$.

说明 括起来各项的符号，完全不变.

例 4. 把下面各式的后面两项用括号括起来，并在括号前面用一个"−"号:

(1) $3a+5b-3c$;　　　　(2) $-5a-3b+5c$.

【解】 (1) $3a+5b-3c=3a-(-5b+3c)$;

(2) $-5a-3b+5c=-5a-(+3b-5c)$.

说明 括起来各项的符号，一律改成相反的符号.

例 5. 把下面各式的后面两项用括号括起来，并把原来第二项的性质符号保留在括号外面：

(1) $3a+5b-3c$;　　　　(2) $3a-5b-3c$.

【解】 (1) $3a+5b-3c=3a+(5b-3c)$;

(2) $3a-5b-3c=3a-(5b+3c)$.

说明 (1)的第二项前面原来是一个正号，保留在括号外面，里面各项符号一律不变，括号内的第一项的正号可以省略不写.

(2)的第二项原来是一个负号，保留在括号外面，里面各项符号一律改变，括号内的第一项改成正号后，正号可以省略不写.

从例 5 我们可以看出，在添括号时，如果把括起来各项的第一项的性质符号保留在括号外面，那末括号内第一项总是一个正号，后面各项的符号则根据前面是"＋"号还是"－"号，确定不变或改变符号.

习　题　3·5(2)

把下面各式的后面两项用括号括起来，并把第二项的性质符号，保留在括号外面：

1. $3x+5y-6z$;　　　　2. $3x-6y+5z$;
3. $-2a+3b+5c$;　　　　4. $3x-6y-5z$;
5. $-2a+3b-5c$;　　　　6. $-2a-3b-5c$;
7. x^2-3x-5;　　　　8. x^2+3x-5;
9. $a^3-3a^2b-b^3$;　　　　10. $a^3+3a^2b+b^3$.

[解法举例:　$3x+5y-6z=3x+(5y-6z)$;

$3x-6y+5z=3x-(6y-5z)$.]

§3·6　整式的乘法

1. 同底数的幂的乘法　让我们计算：

$$a^3\cdot a^2,$$

这里我们要做的是乘法．两个相乘的代数式叫做因式，求得的结果叫做积．这里的两个因式都是以 a 做底数的幂，一个是 a 的三次幂，另一个是 a 的二次幂．因为这两个幂的底数相同，我们把这两个幂叫做同底数的幂，这个乘法叫做**同底数的幂的乘法**．

我们先复习一下幂的意义．a^3 的意义是 $a\cdot a\cdot a$，a^2 的意义是 $a\cdot a$．因此

$$a^3\cdot a^2=(a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a).$$

再根据乘法的结合律，$(a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a)$ 与 $a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a$ 是相等的，而 $a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a$ 可以写成幂的形式 a^5，于是有

$$a^3\cdot a^2=(a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a)=a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=a^5.$$

同样，
$$\begin{aligned}b^4\cdot b^5&=(b\cdot b\cdot b\cdot b)\cdot(b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b)\\&=b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b=b^9.\end{aligned}$$

从这两个例子，我们可以看出，两个同底数的幂的乘积还是这个底数的幂，它的指数等于两个因式的指数的和．

例如：
$$a^3\cdot a^2=a^{3+2}=a^5;$$
$$b^4\cdot b^5=b^{4+5}=b^9.$$

同样地，
$$x^6\cdot x^7=x^{6+7}=x^{13};$$
$$y^{120}\cdot y^{201}=y^{120+201}=y^{321}.$$

一般地说，
$$\begin{aligned}a^m\cdot a^n&=(\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{m\text{个}})(\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n\text{个}})\\&=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdots a}_{(m+n)\text{个}}=a^{m+n}.\end{aligned}$$

这样，我们就得到**同底数的幂的乘法法则**：同底数的两个幂相乘，底数不变，指数相加．即

$$\boldsymbol{a^m\cdot a^n=a^{m+n}}\quad(m,\ n\text{ 是自然数}).$$

注意　在本章里，遇到一个幂的指数用字母表示的时候，都假定它是表示某一个自然数．

例 1. 化简：

(1) $a^{36}\cdot a^{54}$;　　(2) $a^{5}\cdot a^{5}$;　　(3) $a^{8}\cdot a$;

(4) $b\cdot b^{30}$;　　(5) $a^{m}\cdot a^{2n}$;　　(6) $a^{5m}\cdot a$;

(7) $a^{3}\cdot a^{7}\cdot a^{5}$;　　(8) $a^{2m}\cdot a^{n}\cdot a^{m+n}$.

【解】

(1) $a^{36}\cdot a^{54}=a^{36+54}=a^{90}$;　　(2) $a^{5}\cdot a^{5}=a^{5+5}=a^{10}$;

(3) $a^{8}\cdot a=a^{8+1}=a^{9}$;　　(4) $b\cdot b^{30}=b^{1+30}=b^{31}$;

(5) $a^{m}\cdot a^{2n}=a^{m+2n}$;　　(6) $a^{5m}\cdot a=a^{5m+1}$;

(7) $a^{3}\cdot a^{7}\cdot a^{5}=a^{3+7+5}=a^{15}$;

(8) $a^{2m}\cdot a^{n}\cdot a^{m+n}=a^{2m+n+m+n}=a^{3m+2n}$.

注意　a 就是 a^1，$\therefore$ $a^8\cdot a=a^9$，不是 a^8.

$a^m\cdot a^{2n}=a^{m+2n}$，不是 a^{2mn}.

习　题　3·6(1)

化简下面各题：

1. $x^7\cdot x^8$.　　2. $x\cdot x^3$.　　3. $x^5\cdot x^7\cdot x^{16}$.

4. $x^5\cdot x\cdot x^2$.　　5. $x^a\cdot x^b\cdot x^c$.　　6. $x^a\cdot x$.

7. $x^a\cdot x^a$.　　8. $x^a\cdot x^a\cdot x^a\cdot x$.　　9. $a^n\cdot a^n\cdot a^{2n}\cdot a^2$.

10. $x^a\cdot x^{2b}\cdot x$.

2. 单项式乘以单项式　利用同底数幂的乘法法则，我们可以很方便地做单项式和单项式的乘法．例如，如果我们要计算

$$(3a^3x^2)\cdot(-5ax^3y^2),$$

应用乘法交换律和乘法结合律，我们可以把两个单项式里的数字因数结合成一组，把同底数的幂的各个因式也结合成一组，再应用同底数幂的乘法法则，就得到

$$\begin{aligned}(3a^3x^2)\cdot(-5ax^3y^2)&=[3\cdot(-5)](a^3\cdot a)(x^2x^3)y^2\\&=-15a^{3+1}x^{2+3}y^2=-15a^4x^5y^2.\end{aligned}$$

一般地说，做单项式和单项式的乘法，可以应用下面的单项式乘以单项式的法则：**单项式乘以单项式，只要把它们的系数的积作为积的系数，把相同字母的指数的和作为积里这个字母的指数，只在一个单项式里含有的字母，连同它的指数写在积里.**

例 2. 计算：

(1) $(a)(-b)$；　　　　(2) $(-a^2)(-ab)$；

(3) $(-5a^3b^2c)\cdot(-7a^2b^4c^3d)$；

(4) $\left(\frac{2}{3}x^3y^5\right)\cdot\left(-\frac{9}{5}xy^3z^2\right)$；

(5) $(3a^mb^n)\cdot(-2a^{3m}b)$.

【解】 (1) $(a)(-b)=-ab$；

(2) $(-a^2)(-ab)=+a^3b$；

(3) $(-5a^3b^2c)\cdot(-7a^2b^4c^3d)=+35a^5b^6c^4d$；

(4) $\left(\frac{2}{3}x^3y^5\right)\cdot\left(-\frac{9}{5}xy^3z^2\right)=-\frac{6}{5}x^4y^8z^2$；

(5) $(3a^mb^n)\cdot(-2a^{3m}b)=-6a^{4m}b^{n+1}$.

习　题　3·6(2)

计算(1～16)：

1. $(+a)(+b)$.　　　　2. $(-c)(-d)$.

3. $(+m)(-n)$.　　　　4. $(+2a)(-b)$.

5. $(3x^3)(2x^2)$.　　　　6. $(+6y^3)(-3y)$.

7. $(-6a^4)\left(-\frac{1}{2}a^3\right)$.　　　　8. $(+5a^2b^3)(-6a^5b^2c)$.

9. $\left(\frac{2}{3}x^3y^4\right)\left(-\frac{4}{5}x^2y^3z\right)$.　　　　10. $(-6x^3)(-6x^3)$.

11. $(-0.6a^3b^2c)\cdot(+0.5a^3b^3)$.　12. $(0.1a^2b^3)\cdot(0.2ab^4)$.

13. $(+5a^2b^3)(-4a^3bc)\cdot(-5ab^2)$.

14. $(-3x)\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)\left(-\frac{3}{4}y^3z^2\right)$.

15. $(-3x^2)(+3x)$.

16. $(-8x^3)(-9x^{n-3})$ （n 是大于 3 的自然数）.

17. 把 $[-3(a-b)^2][+2(a-b)^3]\left[-\frac{2}{3}(a-b)\right]$ 化成 $k(a-b)^n$ 的形式.

18. 把 $(-5\times10^5)\cdot(-3\times10^6)(-5\times10^4)$ 化成 $k\times10^n$ 的形式.

3. 多项式与单项式相乘 应用乘法对于加法的分配律和单项式乘以单项式的法则，我们还可以方便地做多项式与单项式相乘的乘法. 例如计算

$$m\cdot(a+b+c);$$

根据乘法对于加法的分配律，就得

$$m(a+b+c)=ma+mb+mc.$$

同样地，我们要计算 $(a+b+c)m$，根据乘法对于加法的分配律，就得

$$(a+b+c)m=am+bm+cm.$$

单项式与多项式相乘的法则：单项式与多项式相乘，只要把多项式的各项乘以单项式，然后把各个积相加.

例 3. 求多项式 $3x^2-2ax+5a^2$ 与单项式 $-5ax$ 的积.

【解】 $(3x^2-2ax+5a^2)\cdot(-5ax)$

$$=3x^2(-5ax)+(-2ax)(-5ax)+(5a^2)(-5ax)$$

$$=-15ax^3+10a^2x^2-25a^3x.$$

例 4. 求单项式 $\frac{1}{2}a^2b$ 与多项式 $\frac{2}{3}a^2-\frac{1}{2}ab-b^2$ 的积.

【解】 $\left(\frac{1}{2}a^2b\right)\left(\frac{2}{3}a^2-\frac{1}{2}ab-b^2\right)$

$$=\frac{1}{3}a^4b-\frac{1}{4}a^3b^2-\frac{1}{2}a^2b^3.$$

例 5. 化简:

$$x(x-y-z)+y(x+y-z)-z(-x-y+z).$$

【解】 $x(x-y-z)+y(x+y-z)-z(-x-y+z)$

$=x^2-xy-xz+xy+y^2-yz+xz+yz-z^2$

$=x^2+y^2-z^2.$

习　题　3·6(3)

计算,并整理(1～13):

1. $(2a-b+3c)d.$　　2. $2a(4a-2b+3c).$

3. $(2x-x^2+x^3+3)(-3x).$　　4. $(x^3-xy^2+y^3)(-2xy).$

5. $(3x^2-5y^2+4z^2)(2x^2y).$

6. $(-4xy^2+5x^2y+8x^3)(-3xy^2).$

7. $(-9a^5-3a^3b^2-4a^2b^3-b^5)(-3ab^3).$

8. $\left(\frac{2}{3}a+\frac{5}{6}b-\frac{8}{3}c\right)\left(-\frac{3}{8}abc\right).$　9. $\left(\frac{1}{2}a^2-2a+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}a\right).$

10. $\left(\frac{2}{5}x^2-\frac{3}{4}x-9\right)\left(\frac{4}{9}xy\right).$

11. $\left(1\frac{1}{2}a^2+ab-\frac{3}{5}b^2\right)\left(-1\frac{1}{3}a^2b^2\right).$

12. $(x^my-2x^ny+6x^{2n}y)(4xy).$　13. $(7x^ay^bz^c-9xyz)(-x^ay^bz^c).$

化简下列各式(14～18):

14. $4(x-y+z)-2(x+y-z)-3(-x-y-z).$

15. $2(x^2-2xy+y^2)+3(x^2-y^2)-(x^2+2xy+y^2).$

16. $2a(a^2-ab-b^2)-3ab(4a-2b)+2b(7a^2-4ab+b^2).$

17. $x-\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}(x-1)+\frac{1}{6}(x-2).$

18. $4x-2(x-3)-3[x-3(4-2x)+8].$

4. 多项式乘以多项式　应用乘法对于加法的分配律和多项式与单项式相乘的法则，我们就可以做多项式乘以多项式的乘法. 例如,要计算

$$(a+b)(x+y);$$

我们先把 $a+b$ 这个二项式看作一个整体，把 $x+y$ 看做一个二项式，各项分别与 $a+b$ 相乘，根据乘法对于加法的分配律，可得

$$(a+b)(x+y)=(a+b)x+(a+b)y.$$

再根据多项式乘以单项式的法则，得

$$(a+b)x+(a+b)y=ax+bx+ay+by.$$

多项式乘以多项式的法则：多项式乘以多项式，只要把一个多项式的所有各项乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加，有同类项要加以合并.

例 6. 求多项式 $a-b$ 与 $x-y$ 的积.

【解】 $(a-b)(x-y)=ax-ay-bx+by.$

说明 先拿 $(a-b)$ 的第一项 a 分别与 $(x-y)$ 的各项相乘，得 $ax-ay$，再拿 $(a-b)$ 的第二项 $-b$ 分别与 $(x-y)$ 的各项相乘，得 $-bx+by$，再把这两个积相加. 我们也可以先拿 x 与 $a-b$ 相乘，再拿 $-y$ 与 $a-b$ 相乘，再相加，结果是一样的.

例 7. 求 $(x-3)(x-5)$ 的积.

【解】 $(x-3)(x-5)=x^2-3x-5x+15=x^2-8x+15.$

例 8. 计算：$(x^2-3x-5)(x-3)$.

【解】 $$\begin{aligned}(x^2-3x-5)(x-3)&=x^3-3x^2-5x-3x^2+9x+15\\&=x^3-6x^2+4x+15.\end{aligned}$$

习 题 3·6(4)

计算：

1. $(a+b)(c+d)$.
2. $(a-b)(c-d)$.
3. $(a+b)(c-d)$.
4. $(a-b)(c+d)$.
5. $(-a+b)(-c+d)$.
6. $(-a-b)(-c-d)$.
7. $(x+3)(x+5)$.
8. $(x-12)(x+16)$.
9. $(x+8)(x-13)$.
10. $(x-15)(x-14)$.

11. $(2x+3)(3x-5)$.　　12. $(3x-3)(2x-5)$.

13. $(5a+8)(6a+7)$.　　14. $(-2a+4)(-5a-6)$.

15. $(a+b)(a+b)$.　　16. $(a-b)(a-b)$.

17. $(a+b)(a-b)$.　　18. $(x+y)(x-y)$.

19. $(a^2+a+3)(a-2)$.　　20. $(x^2-2x-3)(x+4)$.

21. $(a^2+ab+b^2)(a-b)$.　　22. $(a^2-ab+b^2)(a+b)$.

23. $(x^4+x^2+1)(x^2-1)$.　　24. $(x^4-x^2+1)(x^2+1)$.

25. $(3a^2-5a+4)(2a^2-7)$.　　26. $(2x^2+3x-5)(x^2+4)$.

27. $\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$.　　28. $(x^2-0.3x-0.5)(x-0.2)$.

29. $\left(3x^2+\frac{1}{2}x-4\right)\left(\frac{1}{2}x^2-5\right)$.　　30. $\left(\frac{1}{3}x^2-5x-4\right)\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}\right)$.

在多项式乘法里，如果两个因式的项数都比较多时，横式的写法在合并同类项时，容易搞错．我们也可以象算术里做乘法一样用直式的写法来进行演算．举例如下：

例 9．用直式演算：$(-5x+3x^2+4)(-5+3x)$.

【解】

$$
\begin{array}{rrrrl}
3x^2 & -5x & +4 & & \cdots\cdots(1) \\
3x & -5 & & & \cdots\cdots(2) \\
\hline
9x^3 & -15x^2 & +12x & & (\times \quad \cdots\cdots(3) \\
 & -15x^2 & +25x & -20 & \cdots\cdots(4) \\
\hline
9x^3 & -30x^2 & +37x & -20 & \cdots\cdots(5)
\end{array}
$$

$\therefore\quad (3x^2-5x+4)(3x-5)=9x^3-30x^2+37x-20$.

说明　我们来说明上面这个演算的步骤．

(1) 先把第一个因式按照 x 的降幂排好，成为 $3x^2-5x+4$ 写在第一排．

(2) 再把第二个因式也按照 x 的降幂排好，成为 $3x-5$，写在第二排，使左边第一项对齐．

(3) 以第二个因式的第一项 $3x$ 乘第一个因式的各项，得 $9x^3-15x^2+12x$，写在横线的下面，作为积的第一个部分．

(4) 以第二个因式的第二项 -5 乘第一个因式的各项，得 $-15x^2$

$+25x-20$，是积的另一部分，写在积的第二排，并且把这个多项式的各项和第一排的多项式里的同类项分别对齐（如果第二个因式还有第三项、第四项等，依次写在下面，都要使同类项上下对齐）。

(5) 把各排的部分积相加，就得最后的乘积。

例 10. 用直式演算：

$$(3x^3-5x^2+2x-6)(2x^3+3x^2-5x-7).$$

【解】

$$\begin{array}{rrrrrrr}
3x^3 & -5x^2 & +2x & -6 & & & \\
2x^3 & +3x^2 & -5x & -7 & & & \\
\hline
6x^6 & -10x^5 & +4x^4 & -12x^3 & & & \\
 & +9x^5 & -15x^4 & +6x^3 & -18x^2 & & \\
 & & -15x^4 & +25x^3 & -10x^2 & +30x & \\
 & & & -21x^3 & +35x^2 & -14x & +42 \\
\hline
6x^6 & -x^5 & -26x^4 & -2x^3 & +7x^2 & +16x & +42
\end{array} \quad (\times$$

答：积是 $6x^6-x^5-26x^4-2x^3+7x^2+16x+42$.

注 代数乘法的直式写法，与算术乘法的直式写法，有下列不同点：

(1) 算术的写法是两个因数右面个位数对齐，代数的写法是两个因式的左面第一项对齐；

(2) 算术乘法一般从右到左地进行计算，但是代数乘法一般要从左到右地进行计算.

例 11. 求积：$(3x^4-2x^2+x-3)(4x^3-x^2+5)$.

【解】

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
3x^4 & & -2x^2 & +x & -3 & & & \\
4x^3 & -x^2 & +5 & & & & & \\
\hline
12x^7 & & -8x^5 & +4x^4 & -12x^3 & & & \\
 & -3x^6 & & +2x^4 & -x^3 & +3x^2 & & \\
 & & & 15x^4 & & -10x^2 & +5x & -15 \\
\hline
12x^7 & -3x^6 & -8x^5 & +21x^4 & -13x^3 & -7x^2 & +5x & -15
\end{array} \quad (\times$$

答：积是 $12x^7-3x^6-8x^5+21x^4-13x^3-7x^2+5x-15$.

说明 第一个因式 $3x^4-2x^2+x-3$，依照 x 的降幂排列时，缺 x^3 这

一项，在列式时，要留出这一项的空白地位，在第一排乘积中，就留出 x^6 项的地位，至于第二个因式 $4x^3-x^2+5$ 也缺少 x 这一项，却可以不空，不过在乘得的各积时，必须注意对齐同类项，否则合并同类项时就不方便，失去直式乘法的作用了。

例 12. 求积：$(2ab-b^2+a^2)\cdot(a^2-b^2-2ab)$

【解】 这里有两个字母 a, b, 依照 a 的降幂排列，

$$\begin{array}{rrrrr}
a^2 & +2ab & -b^2 & & \\
a^2 & -2ab & -b^2 & & \\
\hline
a^4 & +2a^3b & -a^2b^2 & & \\
 & -2a^3b & -4a^2b^2 & +2ab^3 & \\
 & & -a^2b^2 & -2ab^3 & +b^4 \\
\hline
a^4 & & -6a^2b^2 & & +b^4
\end{array} (\times$$

答：积是 $a^4-6a^2b^2+b^4$。

例 13. 计算：

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)(b+a+c).$$

【解】 这题的第一个因式有三个字母 a, b, c, 依照 a 的降幂排列时 a 的一次项有二项 $-ab$ 与 $-ac$, 没有 a 的项有三项 $+b^2$, $+c^2$, $-bc$, 我们可以在 a 的幂相同的各项内，按照 b 的降幂排列，就得

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr}
a^2 & -ab & -ac & +b^2 & -bc & +c^2 & & & & \\
a & +b & +c & & & & & & & \\
\hline
a^3 & -a^2b & -a^2c & +ab^2 & -abc & +ac^2 & & & & \\
 & +a^2b & & -ab^2 & -abc & & +b^3 & -b^2c & +bc^2 & \\
 & & +a^2c & & -abc & -ac^2 & & +b^2c & -bc^2 & +c^3 \\
\hline
a^3 & & & & -3abc & & +b^3 & & & +c^3
\end{array} (\times$$

$$\therefore\quad (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)(b+a+c)$$
$$=a^3-3abc+b^3+c^3.$$

注 1. 为了书写上的方便，最后写出结果时，也可以简单地写做：

$$原式=a^3-3abc+b^3+c^3.$$

2. 所算得的积也可以将三个三次幂排在前面，按照 a, b, c 的次序排列，写做 $a^3+b^3+c^3-3abc$。

习 题 3·6(5)

求下列的乘积，用直式演算(1～5)：

1. $(3x^2-5x-8)(x-3)$。
2. $(x^2-4x+3)(3x^2-5x-8)$。
3. $(2x^3+4x^2+5x+10)(4x-3)$。
4. $(x^3+4x^2+5x-24)(x^2-5x+7)$。
5. $(x^4+2x^3+x^2-4x-11)(x^2-2x+3)$。

求下列的乘积，用直式演算(要注意先按字母的降幂排列)(6～8)：

6. $(x^2-5+3x^3-2x)(6+x^2-5x)$。
7. $(5x-4+7x^2+2x^3)(6x^2+x^3-3+2x)$。
8. $(3x+x^3-2x^2-4)(2x+4x^3+3x^2+1)$。

用直式演算下列乘法(注意按幂排列时有缺项)(9～10)：

9. $(x^3-x+5)(3+x)$。
10. $(3x^2+5x^4-x-4)(x^3-3x+4)$。

用直式演算(11～20)：

11. $(x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)$。
12. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$。
13. $(a^2-ab+2b^2)(a^2-b^2)$。
14. $(4x+2y-3z)(4x-2y+3z)$。
15. $(a^3-a^2b-b^3)(a^2-ab+b^2)$。
16. $(6a^5b+3a^2b^4-2ab^5+b^6)(4a^4-2ab^3-3b^4)$。
17. $(x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5)(x+y)$。
18. $\left(\frac{3}{2}a^3-\frac{3}{4}a+\frac{5}{6}\right)\left(\frac{8}{15}a^3-\frac{1}{10}a^2-\frac{2}{9}\right)$。
19. $(x^2+1+y+x+y^2-xy)(y-1+x)$。
20. $(y^2+x^2+z^2-yz-zx-xy)(y+z+x)$。

§3·7 整式的乘方

1. 幂的乘方 我们来计算 $a^4\cdot a^4\cdot a^4$. 这是同底数的幂的乘法. 应用 §3·6 里讲过的同底数的幂的乘法法则，容易算出

$$a^4\cdot a^4\cdot a^4=a^{4+4+4}=a^{4\times 3}=a^{12}.$$

但是，在积 $a^4\cdot a^4\cdot a^4$ 里，它的三个因式都是 a^4，所以，这个积的意思就是要计算出幂 a^4 的三次方的结果，我们可以把它写成以 a^4 为底的幂的形式，就是 $(a^4)^3$.

我们把这种求一个幂的几次方的计算，叫做幂的乘方.

现在我们再来计算 $(a^5)^6$. 根据乘方的意义，并且应用同底数的幂的乘法法则，容易得到

$$(a^5)^6=a^5\cdot a^5\cdot a^5\cdot a^5\cdot a^5\cdot a^5=a^{5+5+5+5+5+5}=a^{5\times 6}=a^{30}.$$

同样可得

$$(a^2)^4=a^2\cdot a^2\cdot a^2\cdot a^2=a^{2+2+2+2}=a^{2\times 4}=a^8.$$

一般地说，如果 m 和 n 都是自然数，那末

$$(a^m)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\cdots a^m}_{n\text{ 个}}=\overbrace{a^{m+m+\cdots+m}}^{n\text{ 个}}=a^{m\cdot n}.$$

这样我们就得到幂的乘方法则：一个幂乘方，底数不变，把这个幂的指数乘以乘方的指数. 即

$$(a^m)^n=a^{mn}\quad(m,\ n\text{ 都是自然数}).$$

例 1. 化简：

(1) $(a^2)^3$; (2) $(a^3)^3$; (3) $(a^4)^2$; (4) $(b^5)^2$;

(5) $(x^{12})^3$; (6) $(b^7)^3$; (7) $(a^{2m})^n$; (8) $(a^{m+1})^m$;

(9) $(a^{m+1})^{m+1}$; (10) $(a^{m+n})^m$.

【解】

(1) $(a^2)^3=a^{2\cdot 3}=a^6$;　　(2) $(a^3)^3=a^{3\cdot 3}=a^9$;

(3) $(a^4)^2=a^{4\cdot 2}=a^8$;　　(4) $(b^5)^2=b^{5\cdot 2}=b^{10}$;

(5) $(x^{12})^3=x^{12\cdot 3}=x^{36}$;　　(6) $(b^7)^3=b^{7\cdot 3}=b^{21}$;

(7) $(a^{2m})^n=a^{2m\cdot n}=a^{2mn}$;

(8) $(a^{m+1})^m=a^{(m+1)m}=a^{m^2+m}$;

(9) $(a^{m+1})^{m+1}=a^{(m+1)(m+1)}=a^{m^2+2m+1}$;

(10) $(a^{m+n})^m=a^{(m+n)m}=a^{m^2+mn}$.

注意　必须弄清同底数的幂的乘法与幂的乘方的区别，

$a^2\cdot a^3$ 是同底数的幂相乘，　$a^2\cdot a^3=a^{2+3}=a^5$（指数相加）。

$(a^2)^3$ 是幂的乘方，　$(a^2)^3=a^{2\times 3}=a^6$（指数相乘）。

$a^m\cdot a^n$ 是同底数的幂相乘，　$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　（指数相加）。

$(a^m)^n$ 是幂的乘方，　$(a^m)^n=a^{mn}$　（指数相乘）。

习　题　3·7(1)

计算下列各题:

1. $(x^2)^2$.　2. $(a^2)^4$.　3. $x^2\cdot x^2$.

4. $a^2\cdot a^4$.　5. $(a^{12})^3$.　6. $a^{12}\cdot a^3$.

7. $(b^3)^4$.　8. $b^3\cdot b^4$.　9. $(y^5)^5$.

10. $y^5\cdot y^5$.　11. $(a^{2m})^n$.　12. $a^{2m}\cdot a^n$.

13. $a^m\cdot a^2$.　14. $(a^m)^2$.　15. $(a^{16})^{20}$.

16. $a^{16}\cdot a^{20}$.　17. $[(a^3)^2]^4$.　18. $a^3\cdot a^2\cdot a^4$.

19. $[(a^m)^n]^p$.　20. $a^m\cdot a^n\cdot a^p$.　21. $(a^2)^3\cdot(a^5)^2$.

22. $(a^3)^4\cdot(a^2)^4$.　23. $(a^m)^2\cdot(a^n)^3$.　24. $(x^2)^m\cdot(x^3)^n$.

25. $(a^2)^3\cdot a^5$.　26. $(a^2\cdot a^3)^5$.　27. $a^2\cdot a^3+a^5$.

28. $(a^2)^3+(a^3)^2$.　29. $(a^2)^3+a^5$.　30. $a^2\cdot a^3+a^6$.

2. 积的乘方　让我们来计算：$(ab)^3$.

这里 a, b 是两数的积，我们要求的是这积 ab 的三次方。我们把这类计算叫做积的乘方。

根据乘方的意义，得

$$(ab)^3=(ab)(ab)(ab).$$

再根据乘法交换律与结合律，得

$$(ab)(ab)(ab)=ab\cdot ab\cdot ab=a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b=a^3b^3.$$

$$\therefore\quad (ab)^3=a^3b^3.$$

同样，$(xyz)^5=(xyz)(xyz)(xyz)(xyz)(xyz)$

$$=xxxxx\cdot yyyyy\cdot zzzzz=x^5y^5z^5.$$

一般地就有**积的乘方法则**：一个积的乘方，先把各个因式分别乘方，再把所得的结果相乘．即

$$(\boldsymbol{ab})^n=\boldsymbol{a}^n\cdot\boldsymbol{b}^n\quad(n\text{ 是自然数}).$$

例 2．计算：

(1) $(2ab)^3$；　(2) $(-3ab)^2$；　(3) $(-2xyz)^3$；

(4) $(-ab)^5$；　(5) $(-ab)^8$；　(6) $-(ab)^8$．

【解】 (1) $(2ab)^3=2^3a^3b^3=8a^3b^3$；

(2) $(-3ab)^2=(-3)^2a^2b^2=9a^2b^2$；

(3) $(-2xyz)^3=(-2)^3x^3y^3z^3=-8x^3y^3z^3$；

(4) $(-ab)^5=(-1)^5a^5b^5=-a^5b^5$；

(5) $(-ab)^8=(-1)^8a^8b^8=a^8b^8$；

(6) $-(ab)^8=-a^8b^8$．

注意　1．积的各因式中如果有数字的因数，计算结果中要把它的乘方的结果算出来，特别要注意负数的乘方法则，不要搞错符号．

2．在第(4)和第(5)小题中，要把 $-ab$ 看做是三个因式 -1，a，b 的积．

3．第(6)小题中，符号"$-$"在括号的外边，所以只要先计算出$(ab)^8$的结果，再在前面加上"$-$"号．

例 3．计算：$(2x^2y^3z)^4$．

【解】 $(2x^2y^3z)^4=2^4\cdot(x^2)^4\cdot(y^3)^4\cdot z^4=16x^8y^{12}z^4$．

注意　这里积的系数 2 和积中因式 x^2 的指数 2，在乘方以后的情况是不同的．

$$2^4=2\times2\times2\times2=16. \quad (x^2)^4=x^{2\times4}=x^8.$$

例 4. 计算:

(1) $(x^2y^3z)^m$,　　　(2) $(x^my^{m+1}z^{2m})^n$。

【解】 (1) $(x^2y^3z)^m=(x^2)^m(y^3)^mz^m=x^{2m}y^{3m}z^m$.

(2) $(x^my^{m+1}z^{2m})^n=(x^m)^n(y^{m+1})^n(z^{2m})^n$

$$=x^{mn}y^{(m+1)n}z^{2mn}=x^{mn}y^{mn+n}z^{2mn}.$$

注 在计算熟练以后,也可以省去中间步骤,直接写出结果. 例如

$$(x^2y^3z)^m=x^{2m}y^{3m}z^m.$$

例 5. 计算: $(-ab)^3(-a^2b^4c)^2$.

【解】 $(-ab)^3(-a^2b^4c)^2=(-a^3b^3)(a^4b^8c^2)=-a^7b^{11}c^2$.

注意 在第一个括号中,$(-1)^3=-1$, 第二个括号中$(-1)^2=+1$.

习 题 3·7(2)

计算:

1. $(3a^2b^3)^4$.
2. $(-2a^5b^3c)^4$.
3. $(-ab^2c^3)^{101}$.
4. $\left(\frac{1}{2}x^2y\right)^3$.
5. $\left(-\frac{2}{3}a^3bc^2\right)^3$.
6. $\left(1\frac{1}{2}a^2x\right)^4$.
7. $(0.3a^2)^3$.
8. $(3a^2b^3xy)^4$.
9. $(2a^2b^4xy^3)^2$.
10. $(x^2y)^m$.
11. $(x^my)^2$.
12. $(x^my^n)^2$.
13. $(x^my)^n$.
14. $(2a^2)^3\cdot(3a^3)^2$.
15. $(x^2y^3)^5\cdot(xy^2)^4$.
16. $(-a^3b^2)^5\cdot(a^2b^3)^6$.
17. $\left(\frac{1}{2}a^3\right)^2\cdot(-2a^2)^3$.
18. $(-a^3b^5)^4\cdot(-a^2c)^3$.
19. $3a^2b^3(3ab^2)^3\cdot(2a^2b)^2$.
20. $(a^mb^nc)^3\cdot(a^nb^mc^m)^2$.
21. $(3a^3)^2+a^6$.
22. $(3a^3)^3+a^9$.
23. $(a^6)^6+a^6\cdot a^6$.
24. $(-5a^5)^2+(3a^3)^3$.

3. 多项式的乘方 多项式的乘方,可以根据乘方的意

义，改做多项式的乘法来进行计算。

例 6. 计算：$(a+b)^2$.

【解】 $$\begin{aligned}(a+b)^2&=(a+b)(a+b)\\&=a^2+ab+ab+b^2\\&=a^2+2ab+b^2.\end{aligned}$$

注意 $(a+b)^2$ 不等于 a^2+b^2.

例 7. 计算：$(a+b)^3$.

【解】 $$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)(a+b)(a+b)\\&=(a^2+ab+ab+b^2)(a+b)\\&=(a^2+2ab+b^2)(a+b)\\&=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

例 8. 计算：$(x^2+3x-1)^3$.

【解】 用直式演算：

$$\begin{array}{rrrrr}
x^2 & +3x & -1 & & \\
x^2 & +3x & -1 & & \\
\hline
x^4+3x^3 & -x^2 & & & (\times \\
3x^3 & +9x^2 & -3x & & \\
 & -x^2 & -3x & +1 & \\
\hline
x^4+6x^3 & +7x^2 & -6x & +1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
x^4 & +6x^3 & +7x^2 & -6x & +1 & & \\
x^2 & +3x & -1 & & & & \\
\hline
x^6 & +6x^5 & +7x^4 & -6x^3 & +x^2 & & (\times \\
 & 3x^5 & +18x^4 & +21x^3 & -18x^2 & +3x & \\
 & & -x^4 & -6x^3 & -7x^2 & +6x & -1 \\
\hline
x^6 & +9x^5 & +24x^4 & +9x^3 & -24x^2 & +9x & -1
\end{array}$$

$\therefore\quad (x^2+3x-1)^3=x^6+9x^5+24x^4+9x^3-24x^2+9x-1.$

习 题 3·7(3)

计算(用直式或横式都可以):

1. $(x+y)^2$.　　2. $(x-y)^2$.

3. $(a+2b)^2$.　　4. $(3a-4b)^2$.

5. $(x+y)^3$.　　6. $(x-y)^3$.

7. $(a+b+c)^2$.　　8. $(a-b-c)^2$.

9. $(3x^2-3x+2)^2$.　　10. $(a+b)^4$.

§3·8 整式的除法

1. 同底数的幂的除法 让我们计算:

$$a^5 \div a^2 \quad (a \neq 0).$$

在代数除法里,表示被除数的代数式叫做**被除式**,表示除数的代数式叫做**除式**,所得的结果叫做**商**.

这里,被除式 a^5 与除式 a^2 都是以 a 做底数的幂,所以这个除法叫做同底数的幂的除法. 在除法里,因为除数不能是零,所以这里要规定 $a \neq 0$. (以后遇到除法时,我们都假定除式的值不是零.)

注 记号"$\neq$"读作"不等于".

根据除法是乘法的逆运算的规定,我们只要研究 a^5 是 a^2 与怎样的代数式的积. 我们知道,

$$a^2a^3=a^5, \quad \therefore \quad a^5 \div a^2 = a^3.$$

在这个式子里,可以看到商仍旧是以 a 为底的幂,它的指数 3,就是被除式的指数 5 与除式的指数 2 的差,即

$$a^5 \div a^2 = a^3 = a^{5-2}.$$

同样地,我们可以求出

$$a^5 \div a^3 = a^{5-3} \quad (a \neq 0),$$

$$a^5\div a^4=a^{5-4}\quad(a\neq 0).$$

一般地说， $\because\quad a^n\cdot a^{m-n}=a^m\qquad(m>n),$

$$\therefore\quad a^m\div a^n=a^{m-n}\quad(a\neq 0).\tag{1}$$

现在，我们再来计算

$$a^5\div a^5\quad(a\neq 0),$$

很明显，所得的商是1.

一般地说， $\because\quad a^m\cdot 1=a^m,$

$$\therefore\quad a^m\div a^m=1\quad(a\neq 0).\tag{2}$$

从上面的(1)和(2)，我们得到**同底数的幂的除法法则**:

(i) 同底数的两个幂相除，如果被除式的指数大于除式的指数，那末底数不变，指数相减. 即

$$\boldsymbol{a^m\div a^n=a^{m-n}}\quad(m>n),\quad m,\ n\text{ 都是自然数},\ a\neq 0.$$

(ii) 同底数的两个幂相除，如果被除式的指数与除式的指数相等，那末商等于1. 即

$$\boldsymbol{a^m\div a^m=1},\quad m\text{ 是任意自然数},\ a\neq 0.$$

附注 同底数的两个幂相除，如果被除式的指数小于除式的指数，这情况要在下面第五章里再讲.

例1. 计算(这里所有字母都不等于0; $m,\ n$是自然数):

(1) $x^4\div x^2$; (2) $x^8\div x^2$; (3) $x^{15}\div x^5$;

(4) $x^6\div x^5$; (5) $x^6\div x^6$; (6) $a^{m+n}\div a^m$;

(7) $a^{2m}\div a^m$; (8) $a^{3m+2n}\div a^{m+n}$.

【解】

(1) $x^4\div x^2=x^{4-2}=x^2$; (2) $x^8\div x^2=x^{8-2}=x^6$;

(3) $x^{15}\div x^5=x^{15-5}=x^{10}$; (4) $x^6\div x^5=x^{6-5}=x^1=x$;

(5) $x^6\div x^6=1$; (6) $a^{m+n}\div a^m=a^{m+n-m}=a^n$;

(7) $a^{2m}\div a^m=a^{2m-m}=a^m$;

(8) $a^{3m+2n}\div a^{m+n}=a^{(3m+2n)-(m+n)}=a^{2m+n}$.

注意 同底数的幂相除时，指数相减，不是指数相除，$\therefore x^4 \div x^2 = x^{4-2} = x^2$，不是 $x^4 \div x^2 = x^{4\div 2} = x^2$；同样，$x^8 \div x^2 = x^{8-2} = x^6$，不是 $x^8 \div x^2 = x^{8\div 2} = x^4$；$x^{15} \div x^5 = x^{15-5}$ 不等于 $x^{15\div 5}$。

例 2. 计算：

(1) $(x^3)^2 \div x^2$;　　(2) $(x^5)^3 \div (x^2)^3$;

(3) $(x^5)^3 \div (x^3)^5$;　　(4) $(x^4 \div x)^3$.

【解】

(1) $(x^3)^2 \div x^2 = x^6 \div x^2 = x^{6-2} = x^4$;

(2) $(x^5)^3 \div (x^2)^3 = x^{15} \div x^6 = x^{15-6} = x^9$;

(3) $(x^5)^3 \div (x^3)^5 = x^{15} \div x^{15} = 1$;

(4) $(x^4 \div x)^3 = (x^{4-1})^3 = (x^3)^3 = x^9$.

例 3. 计算：

(1) $(x^3 \cdot x^5) \div x^2$;　　(2) $[(x^3)^2 \cdot x^5] \div x^{10}$;

(3) $(x^2 \cdot x^3)^3 \div (x^2)^4$;　　(4) $[(a^2)^3 \cdot (a^3)^4] \div (a^5)^2$.

【解】

(1) $(x^3 \cdot x^5) \div x^2 = x^8 \div x^2 = x^6$;

(2) $[(x^3)^2 \cdot x^5] \div x^{10} = [x^6 \cdot x^5] \div x^{10} = x^{11} \div x^{10} = x$;

(3) $(x^2 \cdot x^3)^3 \div (x^2)^4 = (x^5)^3 \div x^8 = x^{15} \div x^8 = x^7$;

(4) $[(a^2)^3 \cdot (a^3)^4] \div (a^5)^2 = [a^6 \cdot a^{12}] \div a^{10} = a^{18} \div a^{10} = a^8$.

习 题 3·8(1)

计算：

1. $a^8 \div a^3$.　　2. $b^{12} \div b^{11}$.

3. $a^{20} \div a^5$.　　4. $x^{100} \div x^{10}$.

5. $x^{m+1} \div x^m$.　　6. $x^{2m+n} \div x^m$.

7. $(a^8)^2 \div a^7$.　　8. $(a^3)^5 \div a^5$.

9. $b^{16} \div (b^3)^5$.　　10. $(x^3)^4 \div (x^2)^5$.

11. $(a^8 \cdot a^5) \div a^2$.　　12. $a^{16} \div (a^3 \cdot a^5)$.

13. $a^{12}\div a^{3}\div a^{9}$.　　14. $(x^m)^2\div x^m$;

15. $x^m\cdot x^{2n}\div x^n$.　　16. $(x^m\cdot x^{2n})^3\div x^{m+n}$.

17. $(a^3\cdot a^5\cdot a^4\div a^7)^3$.　　18. $[(a^3)^2]^3\div a^5$.

19. $a^{24}\div[(a^2)^3]^4$.　　20. $(x^5\cdot x^3\cdot x^m)^2\div x^6$.

2．单项式除以单项式　我们来计算：

$$36a^3b^5c^2\div 12a^3b^3.$$

这是一个单项式除以单项式的问题．我们仍旧可以利用除法是乘法的逆运算这一关系来推出计算的法则．

$$\because\quad 12a^3b^3\times 3b^2c^2=36a^3b^5c^2,$$

$$\therefore\quad 36a^3b^5c^2\div 12a^3b^3=3b^2c^2.$$

很明显，3 就是 $36\div 12$；b^2 就是 $b^5\div b^3$；而 $a^3\div a^3=1$，在商里就没有字母 a 了；在被除式里有 c^2，而除式里没有字母 c，所以商里还是 c^2．

一般地说，我们有**单项式除以单项式的法则**：单项式除以单项式，系数和相同字母的幂分别相除，只在被除式里有的字母的幂，保留在商里．

附注　在单项式与单项式相除时，如果某些字母在被除式里的指数小于在除式里的指数，或者在除式里出现某些在被除式里所没有的字母，这些情况要在以后讲到分式时再讲．

例 4．计算：$(-136a^5b^3c^2d)\div(-4a^3b^2c^2)$．

【解】　$(-136a^5b^3c^2d)\div(-4a^3b^2c^2)=+34a^2bd$．

说明　$(-136)\div(-4)=34$，就是商的系数，$a^5\div a^3=a^2$，$b^3\div b^2=b$，$c^2\div c^2=1$，d 保留不动，所以商是 $34a^2bd$．

例 5．计算：$\left(-1\frac{2}{3}x^5y^7z^3\right)\div\left(+3\frac{1}{3}x^3yz^3\right)$．

【解】　$\left(-1\frac{2}{3}x^5y^7z^3\right)\div\left(+3\frac{1}{3}x^3yz^3\right)=-\frac{1}{2}x^2y^6$．

例 6．计算：$(-324a^{2m+n}b^{3m}c^{m+3})\div(-12a^mb^{2m}c^2)$．

【解】 $(-324a^{2m+n}b^{3m}c^{m+3})\div(-12a^{m}b^{2m}c^{2})$

$$=27a^{(2m+n)-m}b^{3m-2m}c^{(m+3)-2}=27a^{m+n}b^{m}c^{m+1}.$$

注 在计算熟练以后，中间步骤可以不写出来。

习 题 3·8(2)

计算:

1. $6a^2\div(-2a)$.
2. $-12a^2b^3\div(-3ab^3)$.
3. $(24a^3b^4c)\div(6a^2bc)$.
4. $(140x^3y^5)\div\left(\frac{1}{2}x^3y^5\right)$.
5. $\left(\frac{2}{3}a^3x^2\right)\div\left(\frac{1}{2}a^2x\right)$.
6. $(32a^3b^5x^3y)\div(-8a^2bx^3)$.
7. $36a^2b^3\div12ab$.
8. $36a^2b^3\div12a$.
9. $0.4a^3x^5y^{100}\div0.2ax^4y$.
10. $36a^{2m}\div(-6a^m)$.
11. $(6a^3)^2\div(4a)$.
12. $(3a^2b^3c)^3\div(-a^3b^6)$.
13. $(-12a^3b^4)^2\div(2ab)^3$.
14. $(3a^2)^3\cdot(4b^3)^2\div(6ab)^2$.
15. $(3a^m)^2\div a^{2m}$.
16. $(4a^{m+1})^3\div8a^{2m+1}$.
17. $a^{m+n}\cdot(3a^mb^n)\div(-a^{2m})$.
18. $x^{m+3}\cdot(2x^2)^3\div4x^m$.
19. $\left(\frac{2}{3}a^2b^3\right)^3\div\left(\frac{1}{2}ab^2\right)^2$.
20. $(0.4a^3b^m)^2\div(2a^2b^m)^2$.

3．多项式除以单项式 让我们计算:

$$(3a^3-6a^2-9a)\div3a.$$

这里被除式是一个多项式，除式是一个单项式。

根据除法运算性质

$$(a+b+c)\div m=a\div m+b\div m+c\div m,$$

我们有

$$(3a^3-6a^2-9a)\div3a=3a^3\div3a+(-6a^2)\div3a+(-9a)\div3a$$
$$=a^2-2a-3.$$

一般地说，我们有**多项式除以单项式的法则**：多项式除以单项式，只要把被除式的各项分别除以除式，把所得的各商写成代数和。

例 7. 计算：(1) $(3a^2-6a+18)\div(-3)$；

(2) $(24x^4y^3-36x^3y^4)\div(-12xy^2)$.

【解】

(1) $(3a^2-6a+18)\div(-3)=-a^2+2a-6$;

(2) $(24x^4y^3-36x^3y^4)\div(-12xy^2)=-2x^3y+3x^2y^2$.

例 8. 计算：

$$(0.12a^3b^4c-0.4a^2b^3c+0.6ab^3d)\div(0.2ab^3).$$

【解】 $(0.12a^3b^4c-0.4a^2b^3c+0.6ab^3d)\div(0.2ab^3)$

$$=0.6a^2bc-2ac+3d.$$

注意 $0.4\div0.2=2$，不是 0.2.

例 9. 计算：$(x^{3m+2n}-x^{3m+n}+3x^{2m})\div(-x^{2m})$.

【解】 $(x^{3m+2n}-x^{3m+n}+3x^{2m})\div(-x^{2m})$

$$=-x^{m+2n}+x^{m+n}-3.$$

注意 $3x^{2m}\div(-x^{2m})=-3$，不是 $-3x$.

习　题　3·8(3)

计算：

1. $(12a^4-16a^3+24a^2)\div(-4a^2)$.
2. $(36a^4x^5-24a^3x^4+48a^2x^3)\div(-6a^2x^3)$.
3. $(-81x^5y^5+27x^4y^4-9x^3y^3)\div(+9x^3y^3)$.
4. $(3a^2b-6a^3c+12a^4d)\div(-3a)$.
5. $(0.6a^3b^2c-0.8a^2b^3c^2+0.4ab^2c^3)\div(-0.02abc)$.
6. $\left(\frac{1}{2}a^4x^2-\frac{1}{3}a^3x^3-\frac{3}{4}a^2x^4\right)\div\left(-\frac{2}{3}a^2\right)$.
7. $(a^{2m+5}-3a^{2m+3}+9a^{2m+2})\div(3a^{2m+1})$.
8. $(a^{2m+2}b^{n+3}-3a^{2m+1}b^{n+1})\div(-a^mb)$.

4. 多项式除以多项式 多项式除以多项式，一般可用直式演算，方法同算术里的多位数除法很相象，举例说明如下：

例 10. 计算：$(x^2+5x+6)\div(x+3)$.

【解】

$$
\begin{array}{r}
x+2 \\
x+3 \overline{\big) x^2+5x+6} \\
\underline{x^2+3x} \\
2x+6 \\
\underline{\underline{2x+6}}
\end{array}
$$

$\therefore\quad (x^2+5x+6)\div(x+3)=x+2.$

解法步骤说明 (1) 先把被除式 x^2+5x+6 及除式 $x+3$ 写好.

(2) 将被除式 x^2+5x+6 的第一项 x^2 除以除式 $x+3$ 的第一项 x, 得 $x^2\div x=x$, 这就是商的第一项,写在被除式第一项 x^2 的上面.

(3) 以商的第一项 x 与除式 $x+3$ 相乘,得 $x(x+3)=x^2+3x$, 就是被除式应该拆出的一个部分,写在 x^2+5x+6 的下面.

(4) 从 x^2+5x+6 减去 x^2+3x, 得差 $2x+6$, 写在下面, 就是被除式去掉 x^2+3x 后的一部分.

(5) 再让 $2x+6$ 的第一项 $2x$ 除以除式的第一项 x, 得 $2x\div x=+2$, 这就是商的第二项,写在商的第一项 x 的后面,写成代数和形式.

(6) 以商的第二项 $+2$ 与除式 $x+3$ 相乘, 得 $2x+6$, 写在刚才的差 $2x+6$ 的下面.

(7) 相减得差零,就表示刚好能够除尽.

(8) $\therefore\ (x^2+5x+6)\div(x+3)=x+2.$

例 11. 计算: $(2x^3-x^2+3x-9)\div(2x-3)$.

【解】

$$
\begin{array}{r}
x^2+\ x\ +3 \\
2x-3 \overline{\big) 2x^3-\ x^2+3x-9} \\
\underline{2x^3-3x^2} \\
2x^2+3x \\
\underline{2x^2-3x} \\
6x-9 \\
\underline{\underline{6x-9}}
\end{array}
$$

$\therefore\quad (2x^3-x^2+3x-9)\div(2x-3)=x^2+x+3.$

例 12. 计算:

$$(-24x^2+7x^3-21+58x)\div(-3+7x).$$

注意 在演算除法时，必须先将被除式和除式按照字母的降幂排列好，否则进行将遭遇困难.

【解】 按 x 的降幂将被除式整理为 $7x^3-24x^2+58x-21$，除式整理为 $7x-3$，列式演算如下:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-3x+7 \\ \hline
7x-3 & 7x^3-24x^2+58x-21 \\
 & \underline{7x^3-3x^2} \\
 & \quad -21x^2+58x \\
 & \quad \underline{-21x^2+9x} \\
 & \qquad\qquad 49x-21 \\
 & \qquad\qquad \underline{\underline{49x-21}}
\end{array}$$

$$\therefore\quad (7x^3-24x^2+58x-21)\div(7x-3)=x^2-3x+7.$$

例 13. 计算: $(x^3-8x-3)\div(3-x)$.

【解】 被除式按 x 的降幂排列时，缺 x^2 这一项，要空出适当地位，除式按 x 的降幂排列，应为 $-x+3$; 演算如下:

$$\begin{array}{r|l}
 & -x^2-3x-1 \\ \hline
-x+3 & x^3 \qquad\quad -8x-3 \\
 & \underline{+x^3-3x^2} \\
 & \quad +3x^2-8x \\
 & \quad \underline{+3x^2-9x} \\
 & \qquad\qquad x-3 \\
 & \qquad\qquad \underline{\underline{x-3}}
\end{array}$$

$$\therefore\quad (x^3-8x-3)\div(-x+3)=-x^2-3x-1.$$

例 14. 计算:

$$(1-5x+5x^2-4x^3)\div(x^2-x+1).$$

【解】

$$
\begin{array}{r}
-4x+1 \\
x^2-x+1\overline{)\,-4x^3+5x^2-5x+1} \\
\underline{-4x^3+4x^2-4x} \\
x^2-\ x+1 \\
\underline{\underline{x^2-\ x+1}}
\end{array}
$$

$\therefore\quad (-4x^3+5x^2-5x+1)\div(x^2-x+1)=-4x+1.$

习　题　3·8(4)

计算:

1. $(2x^2-3x+1)\div(x-1)$.
2. $(6x^3+14x^2-4x+24)\div(2x+6)$.
3. $(3x^2+x+9x^3-1)\div(3x-1)$.
4. $(2x^3-5x^2+18)\div(2x+3)$.
5. $(x^4+2x^2-x+2)\div(1-x+x^2)$.
6. $(x^4+11x^2+6-5x^3-12x)\div(3+x^2-3x)$.
7. $(18a^4+82a^2+40-67a-45a^3)\div(3a^2+5-4a)$.
8. $(12+82x^2+106x^4-70x^5-112x^3-38x)\div(3-5x+7x^2)$.

例 15. 计算: $(6x^3-x^2y-14xy^2+3y^3)\div(2x-3y)$.

【解】 这里有两个字母 x 与 y, 按 x 的降幂排列,而后演算,如下:

$$
\begin{array}{r}
3x^2+\ 4xy-\ \ \ \ y^2 \\
2x-3y\overline{)\,6x^3-\ x^2y-14xy^2+3y^3} \\
\underline{6x^3-9x^2y} \\
8x^2y-14xy^2 \\
\underline{8x^2y-12xy^2} \\
-\ 2xy^2+3y^3 \\
\underline{\underline{-\ 2xy^2+3y^3}}
\end{array}
$$

$\therefore\quad (6x^3-x^2y-14xy^2+3y^3)\div(2x-3y)=3x^2+4xy-y^2.$

例 16. 计算：$(4a^4x^2-4a^2x^4+x^6-a^6)\div(x^2-a^2)$.

【解】

$$
\begin{array}{r}
x^4-3a^2x^2+a^4 \\
x^2-a^2\,\big)\overline{\,x^6-4a^2x^4+4a^4x^2-a^6} \\
\underline{x^6-a^2x^4} \\
-3a^2x^4+4a^4x^2 \\
\underline{-3a^2x^4+3a^4x^2} \\
a^4x^2-a^6 \\
\underline{\underline{a^4x^2-a^6}}
\end{array}
$$

$\therefore\quad (x^6-4a^2x^4+4a^4x^2-a^6)\div(x^2-a^2)=x^4-3a^2x^2+a^4$.

说明 被除式里 x 的幂只有偶数次的，因为除式里 x 的幂也只有偶数次的，所以缺项就不必留出空位.

例 17. 计算：$(a^6-b^6)\div(a-b)$.

【解】

$$
\begin{array}{r}
a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5 \\
a-b\,\big)\overline{\,a^6-b^6} \\
\underline{a^6-a^5b} \\
a^5b \\
\underline{a^5b-a^4b^2} \\
a^4b^2 \\
\underline{a^4b^2-a^3b^3} \\
a^3b^3 \\
\underline{a^3b^3-a^2b^4} \\
a^2b^4 \\
\underline{a^2b^4-ab^5} \\
ab^5-b^6 \\
\underline{\underline{ab^5-b^6}}
\end{array}
$$

$\therefore\quad (a^6-b^6)\div(a-b)=a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$.

例 18. 计算：$(a^2-b^2-2bc-c^2)\div(a-b-c)$.

【解】 按 a 的降幂排列，a 的幂相同时按 b 的降幂排列.

$$
\begin{array}{r l}
 & a+b+c \\
\cline{2-2}
a-b-c \,\big) & a^2 \qquad\qquad -b^2-2bc-c^2 \\
 & \underline{a^2-ab-ac} \\
 & \qquad ab+ac-b^2-2bc-c^2 \\
 & \qquad \underline{ab \qquad -b^2-\ bc} \\
 & \qquad\qquad ac \qquad -\ bc-c^2 \\
 & \qquad\qquad \underline{\underline{ac \qquad -\ bc-c^2}}
\end{array}
$$

$$\therefore\quad (a^2-b^2-2bc-c^2)\div(a-b-c)=a+b+c.$$

习　题　3·8(5)

计算：

1. $(a^2-4ab+3b^2)\div(a-3b)$.
2. $(4x^2-5xy+y^2)\div(4x-y)$.
3. $(a^2-b^2)\div(a+b)$.
4. $(a^3+b^3)\div(a+b)$.
5. $(8x^3-27y^3)\div(2x-3y)$.
6. $(a^4+2a^2b^2+9b^4)\div(a^2-2ab+3b^2)$.
7. $(a^5+32b^5)\div(a+2b)$.
8. $(4a^2b^2-3a^3b+3ab^3+a^4-5b^4)\div(b^2-a^2)$.
9. $(2ab+b^2+a^2+2ac+2bc+c^2)\div(b+a+c)$.
10. $(a^2-2ab+b^2-c^2)\div(a-b+c)$.

§3·9　有余式的除法

上面我们所遇到的整式除法，都是恰巧能够除尽，求到整式的商，它们可以用下面的关系式来验算：

$$\text{被除式}=\text{除式}\times\text{商}.$$

但这种情形是比较特殊的，正象算术里整数的除法常常不能整除一样，整式的除法有时也不能恰巧得到整式的商。例如，我们来计算

$$(x^2-2x+3)\div(x+1).$$

列出算式如下：

$$\begin{array}{r@{}l}
 & \phantom{x^2-{}}x-3 \\
x+1\,\big) & \overline{x^2-2x+3} \\
 & x^2+x \\
\hline
 & -3x+3 \\
 & -3x-3 \\
\hline
 & \phantom{x^2-3x+{}}6
\end{array}$$

这里最后一步相减后得到一个不是零的常数 6，并且它的次数已经低于除式的次数，除法不能再做下去了.

象算术里不能整除的除法一样，我们把 $x-3$ 叫做不完全的商，简单地就把它叫做商，把 6 叫做余式.

在算术的有余数除法里，被除数，除数，商和余数之间有下面的关系：

$$\text{被除数}=\text{除数}\times\text{商}+\text{余数}.$$

同样地，在代数的有余式的除法里，被除式，除式，商和余式之间有下面的关系：

$$\text{被除式}=\text{除式}\times\text{商}+\text{余式}.$$

我们可以利用这个关系式来进行除法的验算. 例如

$$\begin{aligned}(x+1)(x-3)+6&=x^2-2x-3+6\\&=x^2-2x+3.\end{aligned}$$

例 计算：

$$(x^4+3x^3-2x^2+5x+1)\div(x^2-x+2).$$

【解】

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & x^2+4x \\
\cline{2-2}
x^2-x+2 \big) & x^4+3x^3-2x^2+5x+1 \\
 & x^4-\ \ x^3+2x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 4x^3-4x^2+5x \\
 & \qquad 4x^3-4x^2+8x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad -3x+1
\end{array}
$$

因为 $-3x+1$ 是 x 的一次式，它的次数已比除式 x^2-x+2 这个二次式的次数低，除法不能再做下去了。所以得商 x^2+4x，余式 $-3x+1$.

习 题 3·9

演算下列除法，说明商和余式，并进行验算：

1. $(x^2-3x+5)\div(x-1)$.
2. $(3x^2+4x-8)\div(x+2)$.
3. $(x^3+3x^2-5x+1)\div(x-2)$.
4. $(2x^3-3x^2-5x+12)\div(x+2)$.
5. $(2x^3-3x^2+6x+8)\div(x^2+3x+1)$.
6. $(x^4-3x^3+6x^2-8x+10)\div(x^2-2x-1)$.

§3·10 乘 法 公 式

我们现在要来研究，怎样利用一些公式使某些多项式的乘法做起来比较简便．这些公式叫做乘法公式．

1．两数和与差的积 先来计算下列一些乘法：

(1) $(x+y)(x-y)$； (2) $(m+n)(m-n)$；

(3) $(a+b)(a-b)$； (4) $(3x+5)(3x-5)$.

这里都是二项式与二项式的乘法，直接做乘法，可以得到．

(1) $(x+y)(x-y)=x^2+xy-xy-y^2=x^2-y^2$;

(2) $(m+n)(m-n)=m^2+mn-mn-n^2=m^2-n^2$;

(3) $(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$;

(4) $(3x+5)(3x-5)=(3x)^2+5(3x)-5(3x)-5^2$

$=(3x)^2-5^2=9x^2-25$.

仔细地比较一下上面这四个乘法里的两个因式，可以看到它们有一个共同的特点，就是每一个题目中的第一个因式是两个代数式的和，而第二个因式恰巧就是这两个代数式的差．例如在(1)里，第一个因式是 x 与 y 的和，而第二个因式恰巧就是 x 与 y 的差；在(4)里，第一个因式是 $3x$ 与 5 的和，而第二个因式恰巧是 $3x$ 与 5 的差．

再观察这四个乘法里计算所得的结果，可以看出它们也有共同的特点，就是所求得的积，恰巧就是因式里两个代数式的平方的差．例如，在(1)里，积 x^2-y^2 恰巧是 x 的平方与 y 的平方的差；在(4)里，积 $9x^2-25$ 恰巧是 $3x$ 的平方与 5 的平方的差．

我们把这种特殊形式的乘法，叫做求两数的和与差的积．

从上面的例子，我们可以得出下面的结论：两数的和与这两数的差的积等于这两个数的平方差．

把这个结论用字母来表示，就得到下面的**两数和与差的积的公式**：

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2. \quad (\text{乘法公式 1})$$

注意　这里 a 与 b 可以表示任意的代数式，但公式里所有的 a 都要表示同样的代数式，所有的 b 也都要表示另一个同样的代数式．

例 1． 利用乘法公式 1 计算：

(1) $(x+a)(x-a)$；　　(2) $(2x+3a)(2x-3a)$；

(3) $(x^2+a^3)(x^2-a^3)$；　　(4) $(2x^3+3a^2)(2x^3-3a^2)$．

【解】 (1) 公式 1 里的 a，在这里是 x，公式 1 里的 b，

在这里是 a，只要把公式里所有的 a 都写做 x，所有的 b 都写做 a 就可以了。

$$\therefore\quad (x+a)(x-a)=x^2-a^2.$$

(2) 公式 1 里的 a，在这里是 $2x$，公式 1 里的 b，在这里是 $3a$，公式里的 a^2 写做 $(2x)^2$，公式里的 b^2，写做 $(3a)^2$，再化简，

$$\therefore\quad (2x+3a)(2x-3a)=(2x)^2-(3a)^2=4x^2-9a^2.$$

(3) 公式 1 里的 a，在这里是 x^2，公式 1 里的 b，在这里是 a^3，

$$\therefore\quad (x^2+a^3)(x^2-a^3)=(x^2)^2-(a^3)^2=x^4-a^6.$$

(4) 公式 1 里的 a，在这里是 $2x^3$，公式 1 里的 b，在这里是 $3a^2$，

$$\therefore\quad (2x^3+3a^2)(2x^3-3a^2)=(2x^3)^2-(3a^2)^2=4x^6-9a^4.$$

例 2. 利用乘法公式计算：

(1) $(2a-3b)(2a+3b)$；

(2) $(3ab-5x^2y^3)(3ab+5x^2y^3)$.

分析 这里第一个因式是两数的差，第二个因式就是同样的两个数的和。根据乘法交换律，这两个因式前后次序可以对调，因此仍旧可以应用两数和与差的积的公式。

【解】

(1) $(2a-3b)(2a+3b)=(2a)^2-(3b)^2=4a^2-9b^2$;

(2) $(3ab-5x^2y^3)(3ab+5x^2y^3)=(3ab)^2-(5x^2y^3)^2$

$$=9a^2b^2-25x^4y^6.$$

例 3. 利用乘法公式计算：

(1) $(3a+2b)(2b-3a)$；

(2) $(5a^3x^2-4by^3)(4by^3+5a^3x^2)$.

分析 这里 $3a+2b=2b+3a$；$4by^3+5a^3x^2=5a^3x^2+4by^3$。根据加法交换律交换位置之后，就和公式里两数和与差的形式一致了。

【解】

(1) $(3a+2b)(2b-3a)=(2b+3a)(2b-3a)$
$$=(2b)^2-(3a)^2=4b^2-9a^2;$$

(2) $(5a^3x^2-4by^3)(4by^3+5a^3x^2)$
$$=(5a^3x^2-4by^3)(5a^3x^2+4by^3)$$
$$=(5a^3x^2)^2-(4by^3)^2=25a^6x^4-16b^2y^6.$$

注　不要把 $2b-3a$ 变成 $3a-2b$, 因为 $2b-3a\neq 3a-2b$.

习　题　3·10(1)

应用乘法公式计算(1～20):

1. $(x+3)(x-3)$.　　2. $(a+6)(a-6)$.
3. $(5+a)(5-a)$.　　4. $(2x+y)(2x-y)$.
5. $(a+2b)(a-2b)$.　　6. $(3a+5b)(3a-5b)$.
7. $(12x-7y)(12x+7y)$.　　8. $(x-19y)(x+19y)$.
9. $(x^2+a)(x^2-a)$.　　10. $(a-b^3)(a+b^3)$.
11. $(a^2-b^5)(a^2+b^5)$.　　12. $(x^{30}+y^{20})(x^{30}-y^{20})$.
13. $(3a^3-2b^2)(3a^3+2b^2)$.　　14. $(5a^5-4x^4)(5a^5+4x^4)$.
15. $(12a^6+11b^4)(12a^6-11b^4)$.
16. $(9x^3+8y^2)(9x^3-8y^2)$.
17. $(3a^2b^3+5xy^4)(3a^2b^3-5xy^4)$.
18. $(2a^5x^2-3b^4y^3)(2a^5x^2+3b^4y^3)$.
19. $(11ax^7-31b^5y)(31b^5y+11ax^7)$.
20. $(3ab^2c-5)(5+3ab^2c)$.

[解法举例: $(x+3)(x-3)=(x)^2-(3)^2=x^2-9$.]

应用乘法公式直接写出乘积, 并验算(21～30):

21. $(m+3n)(m-3n)$.　　22. $(3a+5b)(3a-5b)$.
23. $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$.　　24. $(a^5-x^3)(a^5+x^3)$.
25. $(5a^3-2b^2)(5a^3+2b^2)$.　　26. $(a^6-2b^4)(a^6+2b^4)$.
27. $(3a^2-5x^2y^3)(3a^2+5x^2y^3)$.
28. $(3a^2b^3+4x^3y^5)(3a^2b^3-4x^3y^5)$.

29. $\left(\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{2}x^2\right)\left(\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{2}x^2\right)$.

30. $(0.3a-b^4)(0.3a+b^4)$.

[解法举例: $(m+3n)(m-3n)=m^2-9n^2$.]

附注 有关乘法公式的习题，可用直接乘法自己核对结果。

例 4. 利用乘法公式计算:

(1) $(-a+b)(-a-b)$;

(2) $(-5a^3-6b^2)(5a^3-6b^2)$.

【解】 (1) 这里第一个因式 $-a+b$ 是 $-a$ 与 b 两个数的和，第二个因式 $-a-b$ 是同样的两个数 $-a$ 与 b 的差，所以还可以应用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 这个公式，公式里的 a 在这里是 $-a$，公式里的 b 在这里还是 b.

$$\therefore\quad (-a+b)(-a-b)=(-a)^2-b^2=a^2-b^2.$$

(2) 这里 $-5a^3-6b^2=-6b^2-5a^3$, $5a^3-6b^2=-6b^2+5a^3$，把 $-6b^2$ 当做公式里的 a，把 $5a^3$ 当做公式里的 b，还是两数和与差的积.

$$\begin{aligned}\therefore\quad &(-5a^3-6b^2)(5a^3-6b^2)\\ &=[(-6b^2)-5a^3][(-6b^2)+5a^3]\\ &=(-6b^2)^2-(5a^3)^2=36b^4-25a^6.\end{aligned}$$

例 5. 利用乘法公式计算:

(1) $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$;

(2) $(x-3)(x+3)(x^2+9)$.

【解】

(1) $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$
$$=(a^2)^2-(b^2)^2=a^4-b^4;$$

(2) $(x-3)(x+3)(x^2+9)=(x^2-3^2)(x^2+9)$
$$=(x^2-9)(x^2+9)=(x^2)^2-9^2=x^4-81.$$

例 6. 利用乘法公式计算:

(1) 99×101; (2) 302×298.

【解】 因为 $99=100-1$, $101=100+1$; $302=300+2$, $298=300-2$. 所以可应用公式计算,比较方便.

$$(1)\ 99\times101=(100-1)(100+1)=100^2-1^2=10000-1=9999;$$

$$(2)\ 302\times298=(300+2)(300-2)=(300)^2-2^2=90000-4=89996.$$

习 题 3·10(2)

应用乘法公式计算(1~10):

1. $(4a^2-b^3)(b^3+4a^2)$.
2. $(5x^3+3a^2b)(3a^2b-5x^3)$.
3. $(-3a+2b)(-3a-2b)$.
4. $(-3a-5b^2)(-3a+5b^2)$.
5. $(-2a^3+3b^2)(-2a^3-3b^2)$.
6. $(-5x^3-6y^2)(-5x^3+6y^2)$.
7. $(x+y)(-x+y)$.
8. $(12a+13b)(-12a+13b)$.
9. $(-5x^2-3y^3)(+5x^2-3y^3)$.
10. $(+7a^3-3b^2)(-7a^3-3b^2)$.

应用乘法公式计算(11~16):

11. 103×97.
12. 201×199.
13. 75×85.
14. 34×26.
15. 1005×995.
16. 1.02×0.98.

用乘法公式求积(17~22):

17. $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$.
18. $(a+1)(a-1)(a^2+1)$.
19. $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$.
20. $(3a+2b)(3a-2b)(9a^2+4b^2)$.
21. $(a^4+b^2)(a^2+b)(a^2-b)$.
22. $(x^8+y^8)(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$.

下列乘法,如果能应用乘法公式,就用公式求积,如果不能应用公式,用多项式乘法求积(23~30):

23. $(a+2b)(a-b)$.
24. $(3a^2+4b)(3a^2-b)$.
25. $(2a+3b)(3a-2b)$.
26. $(a^2+b^2)(a^2-2b^2)$.

27. $(a+b)(a-c)$. 28. $(-3a^2-b^2)(3a^2-b^2)$.

29. $(x+3)(x-3)(x^2+6)$. 30. $(-a+b)(-a-b)(b^2+a^2)$.

2. 二项式的平方 让我们计算:

(1) $(a+b)^2$; (2) $(a-b)^2$.

这里 $a+b$ 与 $a-b$ 都是二项式. 要求二项式的平方，可以根据乘法演算,得到

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2$$
$$=a^2-2ab+b^2.$$

这里 a 和 b 都可以表示任意的数或任意的代数式. 计算的结果也总与把乘积里的 a 和 b 用这些数或代数式代入后一样,所以这些结果可以作为公式来应用. 这就是说:

两数和的平方等于这两个数的平方的和加上这两个数的积的两倍;

两数差的平方等于这两个数的平方的和减去这两个数的积的两倍.

用字母来表示上面的结论，就得到下面的**二项式的平方公式**:

$$\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2} \quad (\text{乘法公式 } 2),$$
$$\boldsymbol{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2} \quad (\text{乘法公式 } 3).$$

例 7. 计算:

(1) $(m+2n)^2$; (2) $(3m-5n)^2$.

【解】 (1) 是两数和，应用公式 2，以 m 代公式里的 a，以 $2n$ 代公式里的 b，得到

$$(m+2n)^2=m^2+2(m)(2n)+(2n)^2$$
$$=m^2+4mn+4n^2;$$

(2) 是两数差，应用公式 3，以 $3m$ 代公式里的 a，以 $5n$ 代公式里的 b，得到

$$
\begin{aligned}
(3m-5n)^2 &= (3m)^2-2(3m)(5n)+(5n)^2 \\
&= 9m^2-30mn+25n^2.
\end{aligned}
$$

例 8. 计算:

(1) $(m^2+0.3n^3)^2$; (2) $\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{2}{3}n^3\right)^2$.

【解】 (1) 是两数和，应用公式 2，以 m^2 代公式里的 a，以 $0.3n^3$ 代公式里的 b，得到

$$
\begin{aligned}
(m^2+0.3n^3)^2 &= (m^2)^2+2(m^2)(0.3n^3)+(0.3n^3)^2 \\
&= m^4+0.6m^2n^3+0.09n^6;
\end{aligned}
$$

(2) 是两数差，应用公式 3，以 $\frac{3}{2}m^2$ 代公式里的 a，以 $\frac{2}{3}n^3$ 代公式里的 b，得到

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{2}{3}n^3\right)^2 &= \left(\frac{3}{2}m^2\right)^2-2\left(\frac{3}{2}m^2\right)\left(\frac{2}{3}n^3\right)+\left(\frac{2}{3}n^3\right)^2 \\
&= \frac{9}{4}m^4-2m^2n^3+\frac{4}{9}n^6.
\end{aligned}
$$

例 9. 计算: (1) $(-3a^3+5b^2)^2$; (2) $(-2x^4-5y^5)^2$.

【解】 (1) 可以当做两数和，应用公式 2，以 $-3a^3$ 代公式 2 里的 a，以 $5b^2$ 代公式 2 里的 b，得

$$
\begin{aligned}
(-3a^3+5b^2)^2 &= (-3a^3)^2+2(-3a^3)(5b^2)+(5b^2)^2 \\
&= 9a^6-30a^3b^2+25b^4.
\end{aligned}
$$

也可以把 $-3a^3+5b^2$ 变做 $5b^2-3a^3$ 当做两数差，再利用公式 3 来做:

$$
\begin{aligned}
(-3a^3+5b^2)^2 &= (5b^2-3a^3)^2 \\
&= (5b^2)^2-2(5b^2)(3a^3)+(3a^3)^2 \\
&= 25b^4-30a^3b^2+9a^6.
\end{aligned}
$$

(2) 可以当做 $-2x^4$ 与 $5y^5$ 的差，应用公式 3 来做：

$$(-2x^4-5y^5)^2=(-2x^4)^2-2(-2x^4)(5y^5)+(5y^5)^2$$
$$=4x^8+20x^4y^5+25y^{10}.$$

也可以当做 $-2x^4$ 与 $-5y^5$ 的和，应用公式 2 来做：

$$(-2x^4-5y^5)^2=(-2x^4)^2+2(-2x^4)(-5y^5)+(-5y^5)^2$$
$$=4x^8+20x^4y^5+25y^{10}.$$

注　从这个例子可以看到，有时解一个问题可以应用不同的方法，但是算出来的结果应该是一样的.

习　题　3·10(3)

用公式计算(1～20).

1. $(3a^3-2b^2)^2$.
2. $(2a+3b)^2$.
3. $(5x-4y)^2$.
4. $(7m-6n)^2$.
5. $\left(11x-\frac{1}{2}y\right)^2$.
6. $(a^2+b^2)^2$.
7. $(a^3-b^3)^2$.
8. $(x^3+x^2)^2$.
9. $(a^3-a)^2$.
10. $(3x^3-5a^2)^2$.
11. $(11a^5+7b^4)^2$.
12. $\left(\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}b^3\right)^2$.
13. $(0.3a^2-0.2a)^2$.
14. $(5a^3x^2-4b^2y)^2$
15. $(-7a^2x^4-8bx^2)^2$.
16. $\left(-8ab^3c^5+\frac{1}{4}\right)^2$.
17. $(99)^2$ [提示：$99=100-1$].
18. $(102)^2$.
19. $(1.99)^2$ [提示：$1.99=2-0.01$].
20. $(91)^2$.

[解法举例：$(3a^3-2b^2)^2=(3a^3)^2-2(3a^3)(2b^2)+(2b^2)^2$
$=9a^6-12a^3b^2+4b^4$.]

用公式计算，直接写出结果(21～30)：

21. $(3x^2-5y)^2$.
22. $(3x+2y)^2$.
23. $(5a-b)^2$.
24. $(a^2+3)^2$.

25. $(3a^5-2b^3)^2$.　　26. $(3a^2b^2+1)^2$.

27. $(3ax^2y-2b^3)^2$.　　28. $(a^2-10b^3)^2$.

29. $(-abc-3)^2$.　　30. $(-a^3+2a^2)^2$.

[解法举例: $(3x^2-5y)^2=9x^4-30x^2y+25y^2$.]

例 10. 利用乘法公式求 $(a+b+c)^2$.

【解 1】 演算分二步,先把前面两项添上括号作为公式里的 a, 求出积,而后再应用一次公式.

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2.$$

【解 2】 把后面两项添上括号作为公式里的 b, 逐步求积.

$$(a+b+c)^2=[a+(b+c)]^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$$
$$=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2.$$

例 11. 利用乘法公式求 $(a-2b+3c)^2$.

【解 1】 前面两项添上括号.

$$(a-2b+3c)^2=[(a-2b)+3c]^2$$
$$=(a-2b)^2+2(a-2b)3c+(3c)^2$$
$$=a^2-4ab+4b^2+6ac-12bc+9c^2.$$

【解 2】 后面两项添上括号,把第二项的性质符号"－"保留在括号外,括号内各项变换符号.

$$(a-2b+3c)^2=[a-(2b-3c)]^2$$
$$=a^2-2a(2b-3c)+(2b-3c)^2$$
$$=a^2-4ab+6ac+4b^2-12bc+9c^2.$$

例 12. 利用乘法公式求: $(2a+3b-4c)(2a+3b+4c)$.

分析 这里是三项式乘以三项式, 其中有两项完全相同, 而另外一项差一性质符号, 对前二项添加括号, 先应用两数和与差的积的公式, 再应用两项式平方公式.

【解】 $(2a+3b-4c)(2a+3b+4c)$

$$=[(2a+3b)-4c][(2a+3b)+4c]$$

$$=(2a+3b)^2-(4c)^2=4a^2+12ab+9b^2-16c^2.$$

例 13． 利用乘法公式求 $(3a-4b+5c)(3a+4b-5c)$.

分析 这里也是三项式乘以三项式，其中有一项完全相同，而另外两项都恰巧相差一性质符号，在这两项外面添上括号，这样可以先应用两数和与差的积的公式，再应用二项式的平方公式.

【解】 $(3a-4b+5c)(3a+4b-5c)$

$$=[3a-(4b-5c)][3a+(4b-5c)]$$

$$=(3a)^2-(4b-5c)^2=9a^2-(16b^2-40bc+25c^2)$$

$$=9a^2-16b^2+40bc-25c^2.$$

注意 下面的做法是错误的:

$(3a-4b+5c)(3a+4b-5c)=[(3a-4b)+5c][(3a+4b)-5c]$

$=(3a-4b)(3a+4b)-(5c)^2=9a^2-16b^2-25c^2$.

因为这里 $(3a-4b)$ 与 $(3a+4b)$ 不相同，公式里的 a 应该是相同的.

例 14． 利用乘法公式求 $(3a+4b-5c)(3a-4b-5c)$.

分析 这里两个因式的第一项与第三项都相同，第二项相差一个性质符号，所以根据加法交换律把各因式中的第二项与第三项交换位置，然后各添一个括号，再应用乘法公式.

【解】 $(3a+4b-5c)(3a-4b-5c)$

$$=[(3a-5c)+4b][(3a-5c)-4b]$$

$$=(3a-5c)^2-(4b)^2=9a^2-30ac+25c^2-16b^2.$$

注意 下列添括号的做法都是错误的:

(1) $(3a+4b-5c)(3a-4b-5c)=[3a+(4b-5c)][3a-(4b-5c)]$.

这个做法的错误是在后面因式添括号时外面保留负号而没有把括号内 $-5c$ 调换性质符号.

(2) $(3a+4b-5c)(3a-4b-5c)=[3a+(4b-5c)][3a-(4b+5c)]$.

这个做法在添括号时注意了变换性质符号，但这样括法并没有作用，因

为两个因式中后面的一项不相同，一个是 $4b-5c$，另一个是 $4b+5c$，所以不能应用两数和与差的积的公式.

(3) $(3a+4b-5c)(3a-4b-5c)=[(3a+4b)-5c][(3a-4b)-5c]$. 这样做法虽然也和原式相等，但同上面一样，由于前面这一项不相同，不能应用乘法公式.

习　题　3·10(4)

适当添加括号，应用乘法公式求下列的积(1～12)：

1. $(a-b-c)^2$.　　2. $(2a+3b+c)^2$.

3. $(3a-2b+4c)^2$.　　4. $(5a+b-2c)^2$.

5. $(2a+3b-4c)(2a+3b+4c)$.　　6. $(5a-3b+4c)(5a-3b-4c)$.

7. $(a-2b+3c)(a+2b-3c)$.　　8. $(7a+3b-5c)(7a-3b-5c)$.

9. $(2a-5b+3c)(2a+5b+3c)$.

10. $(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)$.

11. $(3a^2-5b^2+2c^2)(3a^2-5b^2-2c^2)$.

12. $(3x^2-5x+2)(3x^2+5x+2)$.

应用乘法公式化简(13～20)：

13. $(a+b)^2-(a-b)^2$.　　14. $(3x-2y)^2-(3x+2y)^2$.

15. $(a+b)(a-b)-(b+a)(b-a)$.

16. $(3a+2b)(3a-2b)+(3a-2b)^2$.

17. $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2$.

18. $(2a+b-3c)^2-(2a-b+3c)^2$.

19. $(a+2b+3c)(a+2b-3c)-(a-2b+3c)(a+2b-3c)$.

20. $(3x-2y+5z)(5z+2y-3x)+(3x+2y+5z)(3x+2y-5z)$.

[解法举例：$(a+b)^2-(a-b)^2=a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)$
$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2=4ab$.]

3. 两数和(或差)乘以它们的平方和与它们的积的差(或和) 我们来计算：

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) \quad 及 \quad (a-b)(a^2+ab+b^2).$$

用乘法计算，得到：

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$
$$=a^3+b^3,$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$$
$$=a^3-b^3.$$

这就是说:

两数和乘以它们的平方和与它们的积的差等于它们的立方和;

两数差乘以它们的平方和与它们的积的和等于它们的立方差.

用字母来表达，就得到两数和(或差)乘以它们的平方和与它们的积的差(或和)的公式:

$$\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3} \quad (\text{乘法公式 } 4),$$
$$\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3} \quad (\text{乘法公式 } 5).$$

例 15. 用公式计算:

(1) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$;

(2) $(3x^2-5y^2)(9x^4+15x^2y^2+25y^4)$.

分析 (1) 在第一个因式里, 我们有两数 $2a$ 与 $3b$ 的和, 在第二个因式里, $4a^2=(2a)^2$, $9b^2=(3b)^2$, 而 $-6ab=-(2a)(3b)$, 刚刚是这两数的平方和与它们的积的差, 可用乘法公式 4.

【解】 (1) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$

$$=(2a+3b)[(2a)^2-(2a)(3b)+(3b)^2]$$
$$=(2a)^3+(3b)^3=8a^3+27b^3.$$

分析 (2) $9x^4=(3x^2)^2$, $25y^4=(5y^2)^2$, $15x^2y^2=(3x^2)(5y^2)$;

第一个因式是两数差, 第二个因式刚刚是它们的平方和与它们的积的和, 可用乘法公式 5.

(2) $(3x^2-5y^2)(9x^4+15x^2y^2+25y^4)$

$$=(3x^2-5y^2)[(3x^2)^2+(3x^2)(5y^2)+(5y^2)^2]$$
$$=(3x^2)^3-(5y^2)^3=27x^6-125y^6.$$

例16. 用公式计算:

(1) $(3a^3-4bc^2)(9a^6+12a^3bc^2+16b^2c^4)$;

(2) $\left(4x^2y^3+\frac{1}{2}\right)\left(16x^4y^6-2x^2y^3+\frac{1}{4}\right)$.

【解】

(1) $(3a^3-4bc^2)(9a^6+12a^3bc^2+16b^2c^4)$

$=(3a^3-4bc^2)[(3a^3)^2+(3a^3)(4bc^2)+(4bc^2)^2]$

$=(3a^3)^3-(4bc^2)^3=27a^9-64b^3c^6$;

(2) $\left(4x^2y^3+\frac{1}{2}\right)\left(16x^4y^6-2x^2y^3+\frac{1}{4}\right)$

$=\left(4x^2y^3+\frac{1}{2}\right)\left[(4x^2y^3)^2-(4x^2y^3)\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$

$=(4x^2y^3)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=64x^6y^9+\frac{1}{8}$.

习　题　3·10(5)

用乘法公式计算:

1. $(3a+b)(9a^2-3ab+b^2)$.
2. $(a-2x)(a^2+2ax+4x^2)$.
3. $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$.
4. $(a^2+b)(a^4-a^2b+b^2)$.
5. $(2a^2+3b^3)(4a^4-6a^2b^3+9b^6)$.
6. $(3x^4-5y^3)(9x^8+15x^4y^3+25y^6)$.
7. $(x^5-x^2)(x^{10}+x^7+x^4)$.
8. $(3x^3y+2xy^2)(9x^6y^2-6x^4y^3+4x^2y^4)$.
9. $(x^4-x^2+1)(x^2+1)$.
10. $(a^4+a^2b^2+b^4)(a^2-b^2)$.

例17. 用公式计算:

(1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

(2) $(x+2y)(x-2y)(x^4+4x^2y^2+16y^4)$.

【解】

(1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$$

$$=(a^3)^2-(b^3)^2=a^6-b^6;$$

(2) $(x+2y)(x-2y)(x^4+4x^2y^2+16y^4)$

$$=(x^2-4y^2)(x^4+4x^2y^2+16y^4)$$

$$=(x^2-4y^2)[(x^2)^2+x^2(4y^2)+(4y^2)^2]$$

$$=(x^2)^3-(4y^2)^3=x^6-64y^6.$$

说明 (1) 先用乘法公式 4 与 5 得两个立方和与差的因式，再用乘法公式 1.

(2) 先用乘法公式 1 把前面两个因式变成两数差，再用乘法公式 5 求得这两个式子的立方差.

习 题 3·10(6)

用乘法公式计算(1～6):

1. $(a+1)(a-1)(a^4+a^2+1)$.
2. $(2a+b)(2a-b)(16a^4+4a^2b^2+b^4)$.
3. $(x-y)(x+y)(x^4+x^2y^2+y^4)$.
4. $(2a^2-3b^2)(2a^2+3b^2)(16a^8+36a^4b^4+81b^8)$.
5. $(a-1)(a^2+a+1)(a^6+a^3+1)$.
6. $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6)$.

利用乘法公式化简(7～10):

7. $(x-y)(x^2+xy+y^2)+(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$.
8. $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)-(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$.
9. $(x^2-4y^2)(x^4+4x^2y^2+16y^4)-(x^3-8y^3)(x^3+8y^3)$.
10. $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)-(x^3+y^3)^2$.

4. 二项式的立方 我们来计算:

$$(a+b)^3 \quad 和 \quad (a-b)^3.$$

用乘法计算，得到

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)&=(a^2+2ab+b^2)(a+b)\\
&=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\
&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\
(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)&=(a^2-2ab+b^2)(a-b)\\
&=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\
&=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.
\end{aligned}
$$

那就是:

两数和的立方等于第一数的立方，第一数的平方与第二数的积的3倍，第二数的平方与第一数的积的3倍，及第二数的立方这四项的和;

两数差的立方等于第一数的立方，减去第一数的平方与第二数的积的3倍，加上第二数的平方与第一数的积的3倍，再减去第二数的立方.

用字母来表示，可以得到下面的**二项式的立方公式**:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^3=\boldsymbol{a}^3+3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{b}^3 \quad \text{(乘法公式 6)},$$

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^3=\boldsymbol{a}^3-3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{b}^3 \quad \text{(乘法公式 7)}.$$

例 18. 用公式计算:

(1) $(x+y)^3$;　　　　(2) $(x-y)^3$.

【解】 (1) $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$;

(2) $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$.

例 19. 用公式计算:

(1) $(2x+3y)^3$;　　　　(2) $(x^2-y^3)^3$.

【解】

(1) $(2x+3y)^3=(2x)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2+(3y)^3$
$=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$;

(2) $(x^2-y^3)^3=(x^2)^3-3(x^2)^2(y^3)+3(x^2)(y^3)^2-(y^3)^3$
$=x^6-3x^4y^3+3x^2y^6-y^9$.

例 20． 计算：

(1) $(3x^3-2x^2)^3$；　　　　(2) $\left(4x^2+\frac{1}{2}x\right)^3$.

【解】 (1) $(3x^3-2x^2)^3=(3x^3)^3-3(3x^3)^2(2x^2)$

$$+3(3x^3)(2x^2)^2-(2x^2)^3$$

$$=27x^9-54x^8+36x^7-8x^6;$$

(2) $\left(4x^2+\frac{1}{2}x\right)^3=(4x^2)^3+3(4x^2)^2\left(\frac{1}{2}x\right)$

$$+3(4x^2)\left(\frac{1}{2}x\right)^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^3$$

$$=64x^6+24x^5+3x^4+\frac{1}{8}x^3.$$

习　题　3·10(7)

用乘法公式计算：

1．$(m+n)^3$.　　　　2．$(m-2n)^3$.

3．$(2x+y)^3$.　　　　4．$(3a-2b)^3$.

5．$(x^2+2)^3$.　　　　6．$(x^2-a^2)^3$.

7．$(3x^2-2x)^3$.　　　　8．$(5x^3+2a)^3$.

9．$\left(\frac{1}{2}ax-\frac{1}{3}b\right)^3$.　　　　10．$\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a\right)^3$.

例 21． 用公式计算：

$$(a+b-c)^3.$$

【解】 $(a+b-c)^3=[(a+b)-c]^3$

$$=(a+b)^3-3(a+b)^2c+3(a+b)c^2-c^3$$

$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$-3(a^2+2ab+b^2)c+3ac^2+3bc^2-c^3$$

$$=a^3+3a^2b-3a^2c+3ab^2-6abc$$

$$+3ac^2+b^3-3b^2c+3bc^2-c^3.$$

注意 也可以先把后面两项括成一项，再用乘法公式计算。

例 22. 用乘法公式求 $(103)^3$ 及 98^3.

【解】

$$(103)^3=(100+3)^3=100^3+3\cdot100^2\cdot3+3\cdot100\cdot3^2+3^3$$
$$=1,000,000+90,000+2,700+27=1,092,727;$$
$$(98)^3=(100-2)^3=100^3-3\cdot100^2\cdot2+3\cdot100\cdot2^2-2^3$$
$$=1,000,000-60,000+1,200-8=941,192.$$

习 题 3·10(8)

利用乘法公式计算(1～6)：

1. $(a+b+c)^3$.　　2. $(a-2b-c)^3$.

3. $(102)^3$.　　4. $(99)^3$.

5. $(1.01)^3$.　　6. $(0.97)^3$.

化简(7～10)：

7. $(a+b)^3+(a-b)^3$.　　8. $(a+b)^3-(a-b)^3$.

9. $(2a+3b)^3-(2a-3b)^3$.　　10. $(x^2-2y^2)^3-(x^2+2y^2)^3$.

5. x 的两个一次二项式的积

(i) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})$ 的积：直接做乘法，得到

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab.$$

这就是说，形如 $(x+a)(x+b)$ 的积是 x 的二次三项式，其中，x^2 的系数是 1，x 的系数是两个因式的常数项的代数和，而常数项是两个因式的常数项的积.

$$\boldsymbol{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab}\quad\text{(乘法公式 8)}.$$

例 23. 计算：

(1) $(x+7)(x+11)$;　　(2) $(x+12)(x+8)$;

(3) $(x-8)(x-9)$;　　(4) $(x-12)(x-16)$.

【解】 (1) $(x+7)(x+11)=x^2+(7+11)x+7\cdot11$
$$=x^2+18x+77;$$

(2) $(x+12)(x+8)=x^2+(12+8)x+12\cdot 8$
$$=x^2+20x+96;$$
(3) $(x-8)(x-9)=x^2+(-8-9)x+(-8)(-9)$
$$=x^2-17x+72;$$
(4) $(x-12)(x-16)=x^2+(-12-16)x+(-12)(-16)$
$$=x^2-28x+192.$$
从上面四个例子，我们可以看出：

当 a, b 都是正数或都是负数时，积的常数项是正的，x 的系数的绝对值等于 a 与 b 的绝对值的和，符号与 a, b 的符号相同.

例 24. 计算：

(1) $(x+7)(x-5)$;　　(2) $(x+12)(x-18)$;

(3) $(x-12)(x+3)$;　　(4) $(x-8)(x+10)$.

【解】

(1) $(x+7)(x-5)=x^2+(7-5)x+(7)(-5)$
$$=x^2+2x-35;$$
(2) $(x+12)(x-18)=x^2+(12-18)x+(12)(-18)$
$$=x^2-6x-216;$$
(3) $(x-12)(x+3)=x^2+(-12+3)x+(-12)(3)$
$$=x^2-9x-36;$$
(4) $(x-8)(x+10)=x^2+(-8+10)x+(-8)(10)$
$$=x^2+2x-80.$$
从上面四个例子，我们可以看出：

当 a, b 两数的性质符号相反时，积的常数项是负的；x 的系数的绝对值等于 a, b 两数绝对值的差，符号与 a, b 中绝对值较大一数的符号相同.

习　题　3·10(9)

计算:

1. $(x+1)(x+2)$.　　　　　　2. $(x+3)(x+4)$.
3. $(x+7)(x+12)$.　　　　　　4. $(x+20)(x+18)$.
5. $(x-2)(x-4)$.　　　　　　6. $(x-7)(x-8)$.
7. $(x-12)(x-6)$.　　　　　　8. $(x-18)(x-30)$.
9. $(x+5)(x-3)$.　　　　　　10. $(x+2)(x-6)$.
11. $(x-24)(x+18)$.　　　　　　12. $(x-32)(x-7)$.
13. $(a-51)(a+40)$.　　　　　　14. $(a+20)(a+50)$.
15. $(a-7)(a-100)$.　　　　　　16. $(a-13)(a+32)$.
17. $(x-20)(x+30)$.　　　　　　18. $(x-12)(x-50)$.
19. $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$.　　　　　　20. $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

(ii) $(\boldsymbol{ax+b})(\boldsymbol{cx+d})$的积: 直接做乘法,得到

$$\begin{aligned}(ax+b)(cx+d)&=acx^2+bcx+adx+bd\\&=acx^2+(bc+ad)x+bd.\end{aligned}$$

这就是说: 形如$(ax+b)(cx+d)$的积是x的二次三项式,其中, x^2的系数等于两个因式中x的系数的积, 常数项等于两个因式中常数项的积, 而x的系数是两个因式的x的系数与常数项交叉相乘的积的和.

$$\boldsymbol{(ax+b)(cx+d)=acx^2+(bc+ad)x+bd}$$

(乘法公式 9).

注　在应用这个公式来计算时, 为了便于求出积中x^2, x的系数及常数项,也可以先把因式里x项的系数和常数项排成下面的形式:

$$\begin{array}{ccc} a & & b\\ & \times & \\ c & & d\end{array}$$

把第一直行里两个数a和c相乘, 就得积里x^2的系数ac, 把第二直行里两个数b和d相乘, 就得积里的常数项bd, 把两条对角线(斜线

表示的）两数 a 和 d，b 和 c 分别相乘，它们的代数和就是积里 x 的系数 $(ad+bc)$。

这种算法，可以叫做交叉乘法。

例 25. 计算：

(1) $(3x+2)(4x+5)$；　　(2) $(3x-5)(2x-7)$；

(3) $(6x-2)(3x+4)$；　　(4) $(2x+3)(3x-7)$。

【解】

交叉相乘的算式

(1) $(3x+2)(4x+5)$
$=12x^2+23x+10$,

$$\begin{array}{ccc}3 & & 2\\ & \times & \\ 4 & & 5\end{array}\quad 15+8=23;$$

(2) $(3x-5)(2x-7)$
$=6x^2-31x+35$,

$$\begin{array}{ccc}3 & & -5\\ & \times & \\ 2 & & -7\end{array}\quad -21-10=-31;$$

(3) $(6x-2)(3x+4)$
$=18x^2+18x-8$,

$$\begin{array}{ccc}6 & & -2\\ & \times & \\ 3 & & 4\end{array}\quad 24-6=18;$$

(4) $(2x+3)(3x-7)$
$=6x^2-5x-21$.

$$\begin{array}{ccc}2 & & 3\\ & \times & \\ 3 & & -7\end{array}\quad -14+9=-5.$$

例 26. 计算：

(1) $(x-5a)(x+3a)$；　　(2) $(x^2+3)(x^2-7)$；

(3) $(3x^2-5a)(2x^2-3a)$；　　(4) $(2x^2+3y^2)(x^2-2y^2)$。

【解】

(1) $(x-5a)(x+3a)=x^2-2ax-15a^2$;

(2) $(x^2+3)(x^2-7)=x^4-4x^2-21$;

(3) $(3x^2-5a)(2x^2-3a)=6x^4-19ax^2+15a^2$;

(4) $(2x^2+3y^2)(x^2-2y^2)=2x^4-x^2y^2-6y^4$.

例 27. 计算：

(1) $[(a+b)-3][(a+b)+5]$；

(2) $[2(x+y)-3][3(x+y)+4]$.

【解】 (1) $[(a+b)-3][(a+b)+5]$

$$=(a+b)^2+2(a+b)-15$$

$$=a^2+2ab+b^2+2a+2b-15;$$

(2) $[2(x+y)-3][3(x+y)+4]$

$$=6(x+y)^2-(x+y)-12$$

$$=6(x^2+2xy+y^2)-(x+y)-12$$

$$=6x^2+12xy+6y^2-x-y-12.$$

习 题 3·10(10)

计算(1～10):

1. $(x+3)(2x+1)$.
2. $(3x+4)(5x+2)$.
3. $(2x-3)(3x-2)$.
4. $(5x-4)(4x-5)$.
5. $(3x+7)(2x-4)$.
6. $(4x-3)(3x+1)$.
7. $(3x-2)(3x+5)$.
8. $(5x-1)(5x-3)$.
9. $(4x-1)(4x+3)$.
10. $(3x-5)(5x+6)$.

计算(11～20):

11. $(a+3b)(a+5b)$.
12. $(a-3b)(a+7b)$.
13. $(x+2a)(x+3a)$.
14. $(x-3a)(x+8a)$.
15. $(a+10b)(a-7b)$.
16. $(a+7b)(a-3b)$.
17. $(2a+3b)(3a-4b)$.
18. $(3x-2a)(5x-3a)$.
19. $(2a-5b)(3a+4b)$.
20. $(3a-5b)(4a-11b)$.

计算(21～34):

21. $(x^2-3y)(x^2-5y)$.
22. $(x^2-7y^2)(x^2+4y^2)$.
23. $(a^2b^2-5)(a^2b^2+7)$.
24. $(a^2bc+12)(a^2bc+14)$.
25. $(xy+ab)(xy-2ab)$.
26. $(x^2+3x)(x^2+x)$.
27. $(a-2b)(2a-3b)$.
28. $(3a+b)(a+3b)$.
29. $(x^2-5)(2x^2+4)$.
30. $(ax^2-7b)(3ax^2+5b)$.
31. $(a+b+7)(a+b-4)$.
32. $(x-y-3)(x-y-4)$.
33. $(a+b-5)[3(a+b)+2]$.
34. $[2(a-b)+7][5(a-b)-4]$.

本 章 提 要

1. 本章的重要概念

(1) 有理代数式(有理式), 有理整式(整式), 有理分式(分式);

(2) 单项式, 系数, 幂, 指数, 单项式的次数;

(3) 多项式, 多项式的项, 常数项, 同类项, 多项式的次数。

2. 整式的整理化简和运算的步骤和法则

(1) 单项式的整理 $\left\{\begin{array}{l}\text{排因数次序,}\\ \text{把相同字母的因数写做一个幂;}\end{array}\right.$

(2) 多项式的整理 $\left\{\begin{array}{l}\text{排幂(依某一字母的降幂或升幂排列),}\\ \text{合并同类项.}\end{array}\right.$

3. 去括号与添括号法则

$$a+(b-c)=a+b-c,\quad a+b-c=a+(b-c);$$
$$a-(b-c)=a-b+c,\quad a-b+c=a-(b-c).$$

4. 指数法则(m, n 是自然数)

(1) 同底数的幂的乘法　$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;

(2) 同底数的幂的除法　$a^m\div a^n=a^{m-n}$　(当 $m>n$);

$a^m\div a^m=1$;

(3) 幂的乘方　$(a^m)^n=a^{mn}$;

(4) 积的乘方　$(ab)^m=a^mb^m$.

5. 整式的运算法则

(1) 加法　(见 105, 109 页);

(2) 减法　(见 107, 109 页);

(3) 乘法　(见 122, 124, 125 页);

(4) 除法　(见 139, 140, 141 页);

(5) 乘方　(见 132, 134 页).

6. 乘法公式

(1) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,

(2) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,

(3) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$,

(4) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$,

(5) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$,

(6) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,

(7) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$,

(8) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$,

(9) $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(bc+ad)x+bd$.

复 习 题 三

1. 写出三个整式，写出三个分式，写出三个单项式.

2. 写出 x 的一个二次三项式，写出 a 的一个三次四项式.

3. 说出下列各单项式的系数和次数:

(1) $-\frac{2}{3}x^3y$;　(2) x^5y^6;　(3) $-abc^2$;　(4) $5a^2b^4c$.

4. 说出下列多项式的项数和次数，并且指出它的常数项:

(1) $3x-5x^3+6$;　(2) $3a-5a^2+a^3-2a^4-8+2a^5$.

5. 怎样的两个项叫做同类项?

$3a^2b^3$ 和 $2a^3b^2$ 是同类项吗? 为什么?

$5x^2y^5$ 和 $-y^5x^2$ 是同类项吗? 为什么?

6. 单项式的整理有什么要求?

整理下列单项式:

(1) $-3ababa$;　(2) $-xy\frac{1}{2}y$.

7. 多项式的整理有什么要求?

整理下列多项式:

(1) $3x^2-5x-3x-3x^2+8x-7+x^5$;

(2) $x^3y^2-x^2y^3+xy^4-x^4y-x^5-y^5$;

(3) $3a^2b+3ab^2-5a^2b-5ab^2+7a^3-6b^3-5a^3$;

(4) $x^3y-3x^2y^2-yx^3+3y^2x^2$.

演算(8～12):

8. $(3a^3+5a^2b-5ab^2+b^3)+(5a^3-7a^2b+3ab^2-b^3)$.

9. $(3x^3-2x^2-5x+7)-(5x^3-2x^2-3x-4)$
$+(-2x^3-3x^2-5x-7)$.

10. $(3a^2b-5ab^2)(-3ab)-(7a-3b)(-5a^2b^2)$.

11. $(30a^2b^3c^4-25a^3b^2c^5+20a^4b^4c^7)\div(-5a^2b^2c)$.

12. $(3a^2x^8)\div\left(\frac{1}{2}ax\right)\times(-5a^3x^5)\div(15a^2x^7)-a^8\div a^4$.

用直式演算(13～16):

13. $(2x^3-x^2+5)(x-3+x^2)$.

14. $(x^2+2xy+y^2)(x+2y)$.

15. $(x^6-9x^4+12x^2-4)\div(x^3+3x^2-2)$.

16. $(a^5-b^5)\div(a-b)$.

化简(17～34):

17. $x(x^2-3x+5)-x(x-3)$.

18. $(-3x^2)(x^2-2x-3)-(3x)(x^3-2x^2-5)$.

19. $(x-3)(x+4)-(x+3)(x-4)$.

20. $(3x-5)(2x-3)-(2x+3)(3x-4)$.

21. $(x-1)(x-2)-3x(x+3)+2[(x+2)(x+1)-3]$.

22. $-(a+b)+[-a-(2a-b)]-6(a-4b)$.

23. $6x-\{4x+[2x-(3x+\overline{5x+7}-1)+3]-8\}$.

24. $2a-\{4a-c+[3a-(4b-c)-(b+3c)]-6c\}$.

25. $z-[3x+(y+5z)]-[x-(3y+2z)]$.

26. $(a^3\cdot a^5)^2+(a^8\div a^2)^3$.

27. $(-3a^2b^3)^3\div(3ab^2)^2$.

28. $a^3\cdot a^5\cdot a^6\cdot b^3\cdot b^4\cdot a^2+a^3\cdot a^5\cdot b^2\cdot b^4$.

29. $x^3y^2x^5y^2x^4y^5-x^5y^5\div x^2y^3$.

30. $(a^6\div a^2)^2+(a^9\div a^3)\cdot a^2$.

31. $a^m\cdot a^n\cdot a^{2m}\cdot a^3$.

32. $a^{m+1}\div a^m\times a^{n+7}\div a^3$.

33. $(a^m)^n\div a^m$.

34. $(a^{m+1})^n\div a^{mn}$.

用直式演算(35～38):

35. $(a^m+2)\times(a^m+3)$.

36. $(a^{2m}+3a^m+2)\div(a^m+1)$.

37. $(a^{3m}-3a^{2m}+3a^m-1)\div(a^m-1)$.

38. $(a^{2m}+a^m+1)\cdot(a^{2m}-a^m-1)$.

利用乘法公式演算(39～46):

39. $(x+3)^2+(x-3)^2+(2x-3)^2-(2x+3)^2$.

40. $(3x+2y)(3x-2y)-(3x+2y)^2-(3x-2y)^2$.

41. $(a-2b+3c)^2-(a+2b-3c)^2-(a+2b+3c)(a-2b-3c)$.

42. $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)-(3x-2y)^3$.

43. $a(a+b)(a-b)-(a+b)^3$.

44. $(x+3)(x+5)-(x-3)(x-5)$.

45. $(2x-y)(2x-3y)-(3x-y)(2x-5y)$.

46. $3(x+5)(x+3)-5(x-2)(x-3)+2(x+1)(x-2)$.

用乘法公式化简下列各代数式，然后求这个代数式的值(47～48)：

47. $(a+3b)^3-(a-3b)^3$, 已知 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{2}{3}$.

48. $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)-(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$，

已知 $b=-\dfrac{3}{2}$.

用简便的方法求出结果(49～50)：

49. $(x+3)^2(x-3)^2-(2x+1)^2(2x-1)^2$.

[提示：$(x+3)^2(x-3)^2=[(x+3)(x-3)]^2$.]

50. $(x+2y)^3(x-2y)^3-(2x+y)^3(2x-y)^3$.

第四章　因　式　分　解

在上一章里，我们学习了整式和整式的各种运算. 进一步我们将学习分式和分式的运算.但在这之前，我们要先学习多项式的因式分解，这和算术里学习分数以前，先要学习整数的因数分解一样.这一章里我们就来讨论多项式的因式分解.

§4·1　因式分解的意义

在算术里我们知道，一个自然数如果除掉1和它本身以外，不能被其他自然数整除，那末这个数就叫做质数；如果还能够被其他自然数整除，那末这个数就叫做合数. 自然数1既不是质数，也不是合数.

对于一个合数，我们总可以把它分解成若干个质因数的连乘积.

例如：$35=7\times5$，$63=7\times9=7\times3\times3=3^2\times7$，等等.

把一个自然数分解成几个因数的连乘积，叫做自然数的因数分解. 在进行因数分解的时候，通常总要把它分解到不能分解为止.

例1. 把224分解成质因数的连乘积.

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 224 \\ \hline
2 & 112 \\ \hline
2 & 56 \\ \hline
2 & 28 \\ \hline
2 & 14 \\ \hline
 & 7
\end{array}
$$

$$\therefore\quad 224=2^5\times 7.$$

例 2. 把 4320 分解成质因数的连乘积.

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 4320 \\ \hline
2 & 2160 \\ \hline
2 & 1080 \\ \hline
2 & 540 \\ \hline
2 & 270 \\ \hline
3 & 135 \\ \hline
3 & 45 \\ \hline
3 & 15 \\ \hline
 & 5
\end{array}
$$

$$\therefore\quad 4320=2^5\times 3^3\times 5.$$

注　在把一个数分解成质因数的连乘积的时候，我们总把相同的质因数写成幂的形式，如 $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$ 写成 2^5，$3\cdot3\cdot3$ 写成 3^3 等.

我们知道，几个整式相乘，每一个整式都叫做它们的积的因式. 例如

(1) $a(b+c)=ab+ac$，整式 a 和整式 $b+c$ 都是它们的积 $ab+ac$ 的因式.

(2) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，整式 $a+b$ 和整式 $a-b$ 都是它们的积 a^2-b^2 的因式.

很明显，我们也可以把上面的(1)写成

$$ab+ac=a(b+c).$$

这个式子把多项式 $ab+ac$ 写成两个整式 a 和 $b+c$ 的积的形式.

同样，我们可以把多项式 a^2-b^2 化成两个整式的积的形式，就是

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做**多项式的因式分解**.

在进行多项式的因式分解时，象算术里分解因数一样，通常也要把这多项式分解到不能再分解为止.

注　在代数里，一个单项式已经是数字因数和字母因数的乘积的形式了. 例如 $3a^2b^3c$ 就是 $3\times a\times a\times b\times b\times b\times c$，而 $3a^2b^3c$ 的写法比 $3aabbbc$ 的写法简便，因此单项式不再需要分解因式了.

下面我们来研究多项式的因式分解的各种方法.

§4·2　提取公因式的因式分解法

在上一节里，我们曾经看到，多项式 $ab+ac$ 可以化成两个整式的积，就是

$$ab+ac=a(b+c).$$

这里 a 是多项式 $ab+ac$ 的第一项 ab 的一个因式，也是它的第二项 ac 的一个因式，我们把它叫做 ab 和 ac 的**公因式**.

一般地，如果一个多项式的各项里有一个公因式，我们可以象上面这样根据乘法对于加法的分配律，把这个公因式提取出来，把这个多项式分解成两个整式的积. 例如

$$ab+ac+ad=a(b+c+d).$$

这样的因式分解，叫做**提取公因式法**.

例 1. 分解因式：

(1) $abc+3bd-5b$；　　　　(2) $abc+abd-3ab$.

【解】 (1) $abc+3bd-5b$ 是一个三项式，各项里都有因式 b，把它提取出来，得

$$abc+3bd-5b=b(ac+3d-5);$$

(2) $abc+abd-3ab$ 是一个三项式，各项里都有因式 a 和 b，把 a 和 b 都提出来，得

$$abc+abd-3ab=ab(c+d-3).$$

例 2. 分解因式:

(1) $6a^3x^4-8a^2x^5+16ax^6$; (2) $a^8+a^7-2a^6-3a^5$.

【解】 (1) 在 $6a^3x^4-8a^2x^5+16ax^6$ 里, 数字系数的最大公约数是 2, 三项里都有因式 a 和 x, a 的最低次数是 1, x 的最低次数是 4, 所以 $2ax^4$ 是公因式. 把 $2ax^4$ 提出来,得

$$6a^3x^4-8a^2x^5+16ax^6=2ax^4(3a^2-4ax+8x^2);$$

(2) 这里各项都有 a 的幂, 而各项中 a 的最低次数是 5, a^5 就是公因式,把它提出来,得

$$a^8+a^7-2a^6-3a^5=a^5(a^3+a^2-2a-3).$$

例 3. 分解因式:

(1) x^3+x^2+x; (2) $-x^3y^3-x^2y^2-xy$.

【解】 (1) $x^3+x^2+x=x(x^2+x+1)$;

(2) $-x^3y^3-x^2y^2-xy=-xy(x^2y^2+xy+1)$.

说明 (1) x 是 $1\cdot x$, 提出因式 x 后, 另一个因式是 1, 不要漏掉.

(2) 三项都有“$-$”号, 表示各项都有因数 -1, 应该把它提出来, 把系数 -1 的 1 省略不写.

习 题 4·2(1)

分解因式(1～10):

1. $ab+ac$. 2. $ax-bx$.
3. a^2+a. 4. x^3-x^2.
5. $ab-ac-ad$. 6. $a^2b^2-3ab+5a^3b$.
7. $8a^3x^2-6a^5x^2-12a^4x^4$. 8. $32a^5b^4-16a^3b^5+24a^2b^7$.
9. $3ax^2-a^2x+ax$. 10. $6a^3-8a^2-4a$.

[解法举例: $ab+ac=a(b+c)$.]

从下面各代数式的各项中提出一个 -1 的公因数来(11～14):

11. $-a+x$. 12. $-a+b+c$.

13. $-x^3-x^2+x-1$.　　　　　14. $-a^2-b^2-c^2-d^2$.

[解法举例: $-a+x=-(a-x)$.]

把下面各式的公因式连同一个负号提出来(15～18):

15. $-ab-ac-ad$.　　　　　16. $-a^2-a^3+a^4$.

17. $-x^3y^2+2x^2y-xy$.　　　　　18. $-a^3+2a^2b-ab^2$.

[解法举例: $-ab-ac-ad=-a(b+c+d)$.]

例 4. 分解因式:

(1) $x(a+b)+y(a+b)$;　　(2) $(a+b)^2+(a+b)$.

【解】 (1) 这里的公因式是$(a+b)$,把它提出来,得

$$x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y);$$

(2) 这里的公因式是$(a+b)$,把它提出来,得

$$\begin{aligned}(a+b)^2+(a+b)&=(a+b)[(a+b)+1]\\&=(a+b)(a+b+1).\end{aligned}$$

说明 $[(a+b)+1]$这个因式的小括号外面还有加减号，所以要把小括号去掉,得$(a+b+1)$.

例 5. 分解因式:

(1) $a^2b(a-b)+3ab(a-b)$;

(2) $3(a+b)(a-b)(x+y)-(a+b)(a-2b)(x+y)$.

【解】 (1) 把公因式 $ab(a-b)$ 提出来,得

$$a^2b(a-b)+3ab(a-b)=ab(a-b)(a+3);$$

(2) 把公因式$(a+b)(x+y)$提出来,得

$$\begin{aligned}&3(a+b)(a-b)(x+y)-(a+b)(a-2b)(x+y)\\&=(a+b)(x+y)[3(a-b)-(a-2b)]\\&=(a+b)(x+y)(3a-3b-a+2b)\\&=(a+b)(x+y)(2a-b).\end{aligned}$$

说明 $[3(a-b)-(a-2b)]$ 内有同类项，所以要把小括号去掉化简．一般,即使没有同类项,也要化简.

例6. 分解因式:

(1) $(a-b)^2+(b-a)(x+y)$;

(2) $(x-2y)(2x+3y)-2(2y-x)(5x-y)$.

【解】 (1) $\because b-a=-(a-b)$,所以 $a-b$ 是公因式,把它提出来,得

$$\begin{aligned}&(a-b)^2+(b-a)(x+y)\\&=(a-b)^2-(a-b)(x+y)\\&=(a-b)[(a-b)-(x+y)]\\&=(a-b)(a-b-x-y);\end{aligned}$$

(2) $\because 2y-x=-(x-2y)$,所以可以提出公因式 $x-2y$,得

$$\begin{aligned}&(x-2y)(2x+3y)-2(2y-x)(5x-y)\\&=(x-2y)(2x+3y)+2(x-2y)(5x-y)\\&=(x-2y)[(2x+3y)+2(5x-y)]\\&=(x-2y)(2x+3y+10x-2y)\\&=(x-2y)(12x+y).\end{aligned}$$

习 题 4·2(2)

分解因式:

1. $a(x+y)+b(x+y)+c(x+y)$.
2. $a(x-y)-b(x-y)-c(x-y)$.
3. $x(a+b+c)-2y(a+b+c)$.
4. $x(a+2b-3c)+(a+2b-3c)$.
5. $3(x+1)^2-5(x+1)$.
6. $(x-3)^3-(x-3)^2$.
7. $a(a-b)+b(b-a)$.
8. $a^2b(x-y)-ab(y-x)$.
9. $(3x+y)(3x-y)-(x+2y)(y-3x)$.
10. $(x-a)^3+a(a-x)$.
11. $a^2(x-2a)^3-a(2a-x)^2$.
12. $(a-b)(x-y)(x-2y)-(b-a)(y-x)(a+b)$.
13. $(a-3)(a^3+2)+(a-3)(a^2+1)-3(3-a)$.
14. $(a-3)(a^3-2)-(3-a)(a^2-1)+2(3-a)$.

15. $x(b+c-d)+y(d-b-c)$.

16. $2(x-y)(a-2b+3c)-3(x+y)(2b-a-3c)$.

17. $(x+2)(x-3)(x^2-7)+(2+x)(3-x)(x+3)$.

18. $(x+1)^2(2x-3)+(x+1)(2x-3)^2-(x+1)(3-2x)$.

19. $5(x-1)^2(3x-2)+(2-3x)$.

20. $(a-b)^2(a+b)^3-(b-a)^2(b+a)^2$.

§4·3　分组提取公因式的因式分解法

我们来分解多项式:

$$ax+ay+bx+by$$

的因式.

这是一个四项式. 在四项里没有公共的因式, 所以我们不能直接应用提取公因式的因式分解法.

仔细考察这个多项式, 可以看到它的前面两项都有一个因式 a, 把它提出以后得到

$$ax+ay=a(x+y).$$

同时, 这个多项式的第三项和第四项也都有一个因式 b, 把它提出以后, 得到

$$bx+by=b(x+y).$$

所以多项式 $ax+ay+bx+by$ 可以化成

$$\begin{aligned}ax+ay+bx+by&=(ax+ay)+(bx+by)\\&=a(x+y)+b(x+y).\end{aligned}$$

因为 $x+y$ 是 $a(x+y)$ 和 $b(x+y)$ 的公因式, 再把它提出就得

$$\begin{aligned}ax+ay+bx+by&=(ax+ay)+(bx+by)\\&=a(x+y)+b(x+y)\\&=(x+y)(a+b).\end{aligned}$$

这样,我们就把原来的多项式分解成两个整式的积.

象这样的分解方法,叫做**分组提取公因式的分解法.**

例1. 分解因式:

$$ax+bx+cx+ay+by+cy.$$

【解1】 把含有 x 的项与含有 y 的项分成两组,每组各三项,得

$$\begin{aligned}ax+bx+cx+ay+by+cy&=(ax+bx+cx)+(ay+by+cy)\\&=x(a+b+c)+y(a+b+c)\\&=(a+b+c)(x+y);\end{aligned}$$

【解2】 把含有 a 的、b 的、c 的各项分成三组,每组各两项,得

$$\begin{aligned}&ax+bx+cx+ay+by+cy\\&=(ax+ay)+(bx+by)+(cx+cy)\\&=a(x+y)+b(x+y)+c(x+y)\\&=(x+y)(a+b+c).\end{aligned}$$

例2. 分解因式:

$$ax+bx-ay-by.$$

【解1】 $ax+bx-ay-by=(ax+bx)-(ay+by)$

$$=x(a+b)-y(a+b)=(a+b)(x-y);$$

【解2】 $ax+bx-ay-by=(ax-ay)+(bx-by)$

$$=a(x-y)+b(x-y)=(x-y)(a+b).$$

例3. 分解因式:

$$ax^3-ax^2+ax-a.$$

【解】 先提取公因式 a, 再分组分解.

$$\begin{aligned}&ax^3-ax^2+ax-a=a(x^3-x^2+x-1)\\&=a[(x^3-x^2)+(x-1)]=a[x^2(x-1)+(x-1)]\\&=a[(x-1)(x^2+1)]=a(x-1)(x^2+1).\end{aligned}$$

注意 1. 从 $a(x^3-x^2+x-1)$ 变到 $a[(x^3-x^2)+(x-1)]$ 时，不要漏掉中括号，如果写做 $a(x^3-x^2)+(x-1)$，那就错了.

2. $a[(x-1)(x^2+1)]$ 的中括号不需要了，因为三个因式，可以依次相乘，所以最后变成 $a(x-1)(x^2+1)$.

附注 象四项式 $ax+ay+bx-by$，分组后可得 $a(x+y)+b(x-y)$，或 $x(a+b)+y(a-b)$，但不再有公因式，最后的运算仍旧是加法，没有达到因式分解的要求. 这个四项式是不能分解因式的.

习 题 4·3

分解因式:

1. $ab+ac+2a+bx+cx+2x$.
2. $ax-ay+a^2+bx-by+ab$.
3. $ax+ax^2-b-bx$.
4. $ax-ay-bx+by$.
5. $ax^2+by^2+ay^2+bx^2$.

   [提示: by^2 与 ay^2 调换位置，或 by^2 与 bx^2 调换位置.]
6. $ab+a+b+1$.
7. $ab-a-b+1$.
8. $ab-a+b-1$.
9. $ab-1+a-b$.
10. $x^2-3xy-3y^2+xy$.
11. $2x^2+4xy-6xa+3a-x-2y$.
12. x^5+x^4+x+1.
13. x^5-x^4+x-1.
14. ax^5-ax^4+ax-a.
15. ax^5-ax^4+x-1.
16. $a^2x^5-a^2x^4-a^2+a^2x$.

§ 4·4 公式分解法

1. 平方差的因式分解公式 在 § 4·1 里我们曾经看到多项式 a^2-b^2 可以分解成两个因式，就是

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b). \tag{1}$$

事实上，这里我们是反过来应用了两数和与差的积的公式.

我们可以把(1)作为一个公式，利用它来分解由一个数的

平方减去另一个数的平方所构成的多项式的因式.

平方差的因式分解公式：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \quad \text{(因式分解公式1)}.$$

例 1. 分解因式：

(1) a^2-x^2; (2) x^2-y^2.

分析 可以直接应用公式，只要把公式里的 a, b 用有关字母代进去就可以了，公式里的 a，在(1)内是 a，在(2)内是 x；公式里的 b，在(1)内是 x，在(2)内是 y.

【解】 (1) $a^2-x^2=(a+x)(a-x)$;

(2) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$.

例 2. 分解因式：

(1) $4a^2-9b^2$; (2) a^4-4b^4.

分析 $4a^2=(2a)^2$, $9b^2=(3b)^2$，以 $2a$ 和 $3b$ 替代公式里的 a 和 b 就可以了.

【解】 (1) $4a^2-9b^2=(2a)^2-(3b)^2=(2a+3b)(2a-3b)$.

(2) $a^4-4b^4=(a^2)^2-(2b^2)^2=(a^2+2b^2)(a^2-2b^2)$.

例 3. 分解因式：

(1) $16a^{16}-25b^2x^4$; (2) $36a^4x^{10}-9b^6y^8$.

【解】 (1) $16a^{16}-25b^2x^4=(4a^8)^2-(5bx^2)^2$

$$=(4a^8+5bx^2)(4a^8-5bx^2);$$

(2) $36a^4x^{10}-9b^6y^8=(6a^2x^5)^2-(3b^3y^4)^2$

$$=(6a^2x^5+3b^3y^4)(6a^2x^5-3b^3y^4).$$

例 4. 分解因式：

(1) $(x-y)^2-z^2$; (2) $4(x-y)^2-(a-b)^2$;

(3) $4(a+b)^2-9(a-b)^2$; (4) $(ax+by)^2-1$.

分析 这里每一个多项式都是平方差的形式，所以都可以利用上面的公式1. 例如，在(1)里，$x-y$ 就相当于公式里的 a；在(2)里，$2(x-y)$ 相当于公式里的 a；在(4)里，1 相当于公式里的 b.

【解】

(1) $(x-y)^2-z^2=[(x-y)+z][(x-y)-z]$

$=(x-y+z)(x-y-z)$;

(2) $4(x-y)^2-(a-b)^2=[2(x-y)]^2-(a-b)^2$

$=[2(x-y)+(a-b)][2(x-y)-(a-b)]$

$=(2x-2y+a-b)(2x-2y-a+b)$;

(3) $4(a+b)^2-9(a-b)^2=[2(a+b)]^2-[3(a-b)]^2$

$=[2(a+b)+3(a-b)][2(a+b)-3(a-b)]$

$=(2a+2b+3a-3b)(2a+2b-3a+3b)$

$=(5a-b)(-a+5b)=(5a-b)(5b-a)$;

(4) $(ax+by)^2-1=[(ax+by)+1][(ax+by)-1]$

$=(ax+by+1)(ax+by-1)$.

注意　在第一步分解成因式时，不要省掉中括号，但以后要把这些括号内尽量化简，改用小括号.

习　题　4·4(1)

分解因式:

1. a^2-9b^2.
2. $9x^2-4y^2$.
3. a^4-4b^2.
4. a^6-b^8.
5. $16x^{16}-y^4z^6$.
6. $25a^2b^4c^{16}-1$.
7. $1-4x^2y^6$.
8. $(a+b)^2-9$.
9. $(2x-3y)^2-4a^2$.
10. $(a+2b)^2-(x-3y)^2$.
11. $4(a+2b)^2-25(a-b)^2$.
12. $a^2(a+2b)^2-9(x+y)^2$.
13. $b^2-(a-b+c)^2$.
14. $(a+b)^2-4a^2$.
15. $(x-y+z)^2-(2x-3y+4z)^2$.
16. $4(x+y+z)^2-9(x-y-z)^2$.

例 5.　分解因式:

(1) a^4-b^4;　　(2) a^4-9b^4;

(3) a^8-81b^8;　　(4) $a^{16}-b^{16}$.

【解】 (1) $a^4-b^4=(a^2)^2-(b^2)^2=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$
$=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$.

说明 a^2-b^2 还可以应用公式来分解，要继续分解到不能分解为止．但 a^2+b^2 不能再分解，就把这个因式照抄下来，不要漏掉．

(2) $a^4-9b^4=(a^2)^2-(3b^2)^2=(a^2+3b^2)(a^2-3b^2)$.

说明 a^2-3b^2 不能再分解了，因为 3 不能化成一个有理数的平方的形式．

(3) $a^8-81b^8=(a^4)^2-(9b^4)^2=(a^4+9b^4)(a^4-9b^4)$
$=(a^4+9b^4)[(a^2)^2-(3b^2)^2]$
$=(a^4+9b^4)[(a^2+3b^2)(a^2-3b^2)]$
$=(a^4+9b^4)(a^2+3b^2)(a^2-3b^2)$.

(4) $a^{16}-b^{16}=(a^8)^2-(b^8)^2=(a^8+b^8)(a^8-b^8)$
$=(a^8+b^8)[(a^4)^2-(b^4)^2]$
$=(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^4-b^4)$
$=(a^8+b^8)(a^4+b^4)[(a^2)^2-(b^2)^2]$
$=(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a^2-b^2)$
$=(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$.

例 6．分解因式：

(1) a^3-ab^2;　　　　(2) $a^4-9a^2b^2$;

(3) a^2-b^2+a-b;　　　　(4) $5(a^2-b^2)-a+b$.

【解】 (1) 先提出公因式 a，再应用平方差公式，得

$$a^3-ab^2=a(a^2-b^2)=a(a+b)(a-b).$$

(2) 先提出公因式 a^2，得

$$a^4-9a^2b^2=a^2(a^2-9b^2)=a^2[a^2-(3b)^2]$$
$$=a^2(a+3b)(a-3b).$$

(3) 分成两组，第一组应用平方差公式，再提取公因式 $(a-b)$

$$a^2-b^2+a-b=(a+b)(a-b)+(a-b)$$
$$=(a-b)(a+b+1).$$

注意　如果把a^2-b^2+a-b变成$a^2+a-b^2-b=a(a+1)-b(b+1)$，就没有公因式，不能分解下去，达不到因式分解的要求．遇到这种情况，要换一种分组方法再试．

(4) $5(a^2-b^2)-a+b=5(a+b)(a-b)-(a-b)$
$$=(a-b)[5(a+b)-1]=(a-b)(5a+5b-1).$$

习　题　4·4(2)

分解因式：

1．$a^4-x^4y^4$．
2．a^8b^8-1．
3．a^4-16．
4．$16a^4b^8-c^8$．
5．a^9-ab^2．
6．$a^2b^3-4a^2b$．
7．x^2-y^2+x-y．
8．x^2-y^2-x-y．
9．x^2-y^2+x+y．
10．x^2-y^2-x+y．
11．a^2-4b^2-a-2b．
12．$a^2-4b^2-2a+4b$．
13．a^3-4ab^2-a-2b．
14．$5x^2-5y^2+x+y$．
15．$3x^2-3y^2-x-y$．
16．$2x^2-2y^2-x+y$．
17．a^2+a-b^2-b．
18．a^2+a-b^2+b．
19．a^3-ab^2+a-b．
20．$a^3-ab^2-a^2-ab$．

2．完全平方的因式分解公式　我们计算两数和或差的平方时可以应用下面的公式：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

反过来就得到**完全平方的因式分解公式**：

$$\boldsymbol{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}\quad(\text{因式分解公式 }2),$$
$$\boldsymbol{a^2-2ab+b^2=(a-b)^2}\quad(\text{因式分解公式 }3).$$

注　因为$a^2+2ab+b^2$和$a^2-2ab+b^2$可以分别化成两个数的和或者两个数的差的平方，我们把它们叫做**完全平方式**．

例 7．分解因式：

(1) x^2+2x+1;　　　　(2) $x^2-6ax+9a^2$;

(3) $4a^2-12ab+9b^2$;　　　　(4) $a^4+2a^2b^3+b^6$.

【解】

(1) $x^2+2x+1=x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2=(x+1)^2$;

(2) $x^2-6ax+9a^2=x^2-2\cdot x\cdot 3a+(3a)^2=(x-3a)^2$;

(3) $4a^2-12ab+9b^2=(2a)^2-2\cdot(2a)(3b)+(3b)^2$

$=(2a-3b)^2$;

(4) $a^4+2a^2b^3+b^6=(a^2)^2+2\cdot(a^2)(b^3)+(b^3)^2$

$=(a^2+b^3)^2$.

说明　要确定能不能应用公式2或3来分解，先要看两个平方项，确定公式里的 a 与 b 在这里各是什么，然后看中间一项是不是相当于 $+2ab$ 或 $-2ab$. 如果是的，就可以分解成为两数和或差的平方形式了。

在初学的时候，中间这个过渡性步骤，不要省掉.

例 8. 看下列各式的空格处各应该填什么，才能够应用上面的分解因式公式 2 或 3:

(1) $x^2+\square xy+25y^2$;　　　　(2) $100x^2-\square xy+49y^2$;

(3) $9x^2-36x+\square$;　　　　(4) $\frac{1}{4}x^2y^2-\square+z^4$;

(5) $36a^4-60a^2b^2x+\square$;　　　　(6) $49a^2-\square+16b^6$.

【解】 (1) 这里 a 是 x, b 是 $5y$, $\therefore 2ab$ 应该是 $10xy$, 空白处是 10;

(2) 这里 a 是 $10x$, b 是 $7y$, $\therefore 2ab$ 应该是 $140xy$, 空白处是 140;

(3) 这里 a 是 $3x$, 从 $36x$ 里分出 $2\cdot 3x$, 得 $2\cdot 3x\cdot 6$, $\therefore b$ 是 6, 空白处应该是 36;

(4) 这里 a 是 $\frac{1}{2}xy$, b 是 z^2, 空白处应为 $2\cdot\frac{1}{2}xy\cdot z^2=xyz^2$;

(5) 这里 a 是 $6a^2$，从 $60a^2b^2x$ 里分出 $2\cdot 6a^2$，得 $2\cdot 6a^2\cdot 5b^2x$，
$\therefore b$ 是 $5b^2x$，空白处应该是 $25b^4x^2$；

(6) 这里 a 是 $7a$，b 是 $4b^3$，空白处应为 $2\cdot 7a\cdot 4b^3=56ab^3$.

例 9. 分解因式：

(1) a^3-8a^2+16a；　　(2) $9(a+b)^2+6(a+b)+1$；

(3) $x^4a^2+2a^2x^2+a^2$；　　(4) $(x+y)^2-4(x+y)b^2+4b^4$。

【解】 (1) $a^3-8a^2+16a=a(a^2-8a+16)=a(a-4)^2$；

(2) $$\begin{aligned}&9(a+b)^2+6(a+b)+1\\&=[3(a+b)]^2+2\cdot 3(a+b)1+1^2\\&=[3(a+b)+1]^2=(3a+3b+1)^2;\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}&x^4a^2+2a^2x^2+a^2=a^2(x^4+2x^2+1)\\&=a^2[(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot 1+1^2]=a^2(x^2+1)^2;\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}&(x+y)^2-4(x+y)b^2+4b^4\\&=(x+y)^2-2(x+y)\cdot(2b^2)+(2b^2)^2\\&=[(x+y)-2b^2]^2=(x+y-2b^2)^2.\end{aligned}$$

习　题　4·4(3)

分解因式(1～10)：

1. $x^2-12x+36$.　　2. $x^2+8x+16$.

3. $4a^2-20ab+25b^2$.　　4. $9x^2+12xy+4y^2$.

5. $y^2-50xy+625x^2$.　　6. $x^2-38x+361$.

7. $9x^2y^4+30xy^2z+25z^2$.　　8. x^6+24x^3+144.

9. $1-6ab^3+9a^2b^6$.　　10. $49a^2-112ab^2+64b^4$.

在下列各题的空白处填上适当的数字或字母，使这个式子是一个完全平方式(11～14)：

11. $\square a^2-6a+1$.　　12. $4a^2+\square ab+25b^2$.

13. $64x^4+\square+9y^2$.　　14. $49a^2b^2c^2-28abcd^2+\square$.

分解因式(15～20)：

15. $a^3-4a^2b+4ab^2$.　　16. $a^4x^2+4a^2x^2y+4x^2y^2$.

17. $16a^2b^4-8ab^3c^2+b^2c^4$.　　18. $9(a-b)^2+6(a-b)+1$.

19. $(a+2b)^2-10(a+2b)+25$.

20. $4x^2(a+b)^2-12xy(a+b)^2+9y^2(a+b)^2$.

例 10. 分解因式：

$$x^2-a^2+2ab-b^2.$$

分析　这里不能直接应用公式，但是把后面三项括成一组，先应用公式 3 使 $a^2-2ab+b^2$ 变成 $(a-b)^2$，就可以应用平方差公式再进行因式分解.

【解】
$$\begin{aligned}x^2-a^2+2ab-b^2&=x^2-(a^2-2ab+b^2)\\&=x^2-(a-b)^2\\&=[x+(a-b)][x-(a-b)]\\&=(x+a-b)(x-a+b).\end{aligned}$$

注　如果把前面两项与后面两项各分成一组，那末

$$\begin{aligned}x^2-a^2+2ab-b^2&=(x^2-a^2)+(2ab-b^2)\\&=(x+a)(x-a)+b(2a-b),\end{aligned}$$

这样就不能再分解下去，达不到因式分解的目的.

例 11. 分解因式：

$$4x^2+12xy+9y^2-16z^2.$$

【解】 把前面三项括成一组，得

$$\begin{aligned}4x^2+12xy+9y^2-16z^2&=(4x^2+12xy+9y^2)-16z^2\\&=(2x+3y)^2-(4z)^2\\&=[(2x+3y)+4z][(2x+3y)-4z]\\&=(2x+3y+4z)(2x+3y-4z).\end{aligned}$$

例 12. 分解因式：

$$2ab-a^2-b^2+1.$$

【解】 $2ab-a^2-b^2+1=1-(a^2-2ab+b^2)$

$=1-(a-b)^2=[1+(a-b)][1-(a-b)]$

$=(1+a-b)(1-a+b)$。

例 13. 分解因式：

$$x^2-2xy+y^2-a^2-2ab-b^2.$$

【解】 $x^2-2xy+y^2-a^2-2ab-b^2$

$=(x-y)^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=(x-y)^2-(a+b)^2$

$=[(x-y)+(a+b)][(x-y)-(a+b)]$

$=(x-y+a+b)(x-y-a-b)$.

例 14. 分解因式：

$$a^2-4ab+4b^2+6a-12b+9.$$

【解】 $a^2-4ab+4b^2+6a-12b+9$

$=(a-2b)^2+2\cdot3\cdot(a-2b)+9$

$=[(a-2b)+3]^2=(a-2b+3)^2$.

习　题　4·4(4)

分解因式：

1. $x^2+2xy+y^2-9a^2$.
2. $4x^2-a^2-6a-9$.
3. $x^2+4ax+4a^2-b^2$.
4. $9a^2-x^2+4x-4$.
5. $1-x^2+2xy-y^2$.
6. $a^4-x^2+4ax-4a^2$.
7. $a^2-b^2-x^2+y^2-2ay+2bx$.
8. $a^2+2ab+b^2-2a-2b+1$.
9. $3a^2-6ab+3b^2-5a+5b$.
10. $a^2-4ab+4b^2-a^3+4ab^2$.

3．立方和或立方差的因式分解法　从乘法公式：

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

及

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3,$$

反过来就得到**立方和或立方差的因式分解公式**：

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$ （因式分解公式 4），

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$ （因式分解公式 5）。

例 15．分解因式：

(1) a^3+8b^3；　　(2) $27a^3-1$；

(3) a^6-b^9；　　(4) $8x^6+27y^{12}$。

【解】

(1) $a^3+8b^3=a^3+(2b)^3$

$=(a+2b)[a^2-a\cdot(2b)+(2b)^2]$

$=(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$；

(2) $27a^3-1=(3a)^3-1$

$=(3a-1)[(3a)^2+3a\cdot1+1^2]$

$=(3a-1)(9a^2+3a+1)$；

(3) $a^6-b^9=(a^2)^3-(b^3)^3$

$=(a^2-b^3)[(a^2)^2+(a^2)(b^3)+(b^3)^2]$

$=(a^2-b^3)(a^4+a^2b^3+b^6)$；

(4) $8x^6+27y^{12}=(2x^2)^3+(3y^4)^3$

$=(2x^2+3y^4)[(2x^2)^2-(2x^2)(3y^4)+(3y^4)^2]$

$=(2x^2+3y^4)(4x^4-6x^2y^4+9y^8)$.

注意　切勿把 a^3+b^3 分解成为 $(a+b)^3$，把 a^3-b^3 分解成为 $(a-b)^3$。

习　题　4·4(5)

分解因式：

1．a^3-125b^3。　　2．$8x^3+27$。

3．x^6+y^9。　　4．x^6+y^6。

5．$a^{12}+b^{12}$。　　6．$64a^3-1$。

7．$\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{27}y^3$。　　8．$(x+y)^3+8$。

9．$343m^3-125n^6$。　　10．$1-8(a+b)^3$。

例 16. 分解因式:

$$x^6-y^6.$$

【解】 先应用平方差公式,而后再应用公式 4 和 5, 得

$$\begin{aligned}x^6-y^6&=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)\\&=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2).\end{aligned}$$

注 如果先应用立方差公式,那末

$$\begin{aligned}x^6-y^6&=(x^2)^3-(y^2)^3=(x^2-y^2)[(x^2)^2+x^2y^2+(y^2)^2]\\&=(x+y)(x-y)(x^4+x^2y^2+y^4).\end{aligned}$$

下一步要把 $x^4+x^2y^2+y^4$ 再进行分解,不太容易. 实际上, $x^4+x^2y^2+y^4$ 可以这样分解:

$$\begin{aligned}x^4+x^2y^2+y^4&=x^4+x^2y^2+y^4+x^2y^2-x^2y^2=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2\\&=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)\\&=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2),\end{aligned}$$

这里要加上一个 x^2y^2 再减去一个 x^2y^2, 比较复杂了. 以后如果遇到平方差公式与立方差公式都可以应用时,总以先用平方差公式比较妥当.

例 17. 分解因式:

$$x^3+x^2+x-y^3-y^2-y.$$

分析 先根据加法交换律与结合律把六项分成三组, 第一组用立方差公式分解,第二组用平方差公式分解,这样可以有一个二项公因式 $x-y$.

【解】

$$\begin{aligned}&x^3+x^2+x-y^3-y^2-y\\&\quad=(x^3-y^3)+(x^2-y^2)+(x-y)\\&\quad=(x-y)(x^2+xy+y^2)+(x+y)(x-y)+(x-y)\\&\quad=(x-y)[(x^2+xy+y^2)+(x+y)+1]\\&\quad=(x-y)(x^2+xy+y^2+x+y+1).\end{aligned}$$

注意 如果把原式直接分成有 x 的与有 y 的两组,那末

$$x^3+x^2+x-y^3-y^2-y=x(x^2+x+1)-y(y^2+y+1),$$

这样就不能达到分解因式的目的.

习　题　4·4(6)

分解因式:

1. a^6-64b^6.　　2. $a^{12}-b^{12}$.
3. x^3+6x+y^3+6y.　　4. $x^3-y^3-x^2+2xy-y^2$.
5. $x^3-x^2-x-y^3+y^2+y$.　　6. $a^3-a^2-a+b-b^2+2ab-b^3$.
7. $a^3+a^2+b^3+b^2+2ab$.　　8. $a^3+a^2+b^3-b^2+a+b$.
9. $a^3+8b^3+2a+4b$.　　10. $a^6+a^2+b^6+b^2$.

4. 完全立方的因式分解法　从乘法公式:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

及

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$

反过来可得完全立方的因式分解公式:

$$\boldsymbol{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3} \quad \text{(因式分解公式 6)},$$

$$\boldsymbol{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3} \quad \text{(因式分解公式 7)}.$$

例 18. 分解因式:

$$a^6-3a^4b+3a^2b^2-b^3.$$

【解】 $a^6-3a^4b+3a^2b^2-b^3$

$=(a^2)^3-3(a^2)^2b+3(a^2)b^2-b^3$

$=(a^2-b)^3$.

例 19. 分解因式:

$$a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3.$$

【解】 $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$

$=a^3+3\cdot a^2(2b)+3\cdot a(2b)^2+(2b)^3$

$=(a+2b)^3$.

说明　要应用这两个公式，可先看两个立方项，确定公式里的 a 与 b 各是什么，然后看中间两项是否刚刚是 $3a^2b$ 和 $3ab^2$，再看符号是否对头. 一定要完全合适，才能应用公式.

习 题 4·4(7)

分解因式:

1. $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$.　　2. $27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$.

3. $27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3$.

4. $1+12x^2y^2+48x^4y^4+64x^6y^6$.　5. $x^6-6x^4y+12x^2y^2-8y^3$.

6. $27x^3-9x^2y+xy^2-\frac{1}{27}y^3$.　　7. $a^4-3a^3+3a^2-a$.

8. $1-3(x-y)+3(x-y)^2-(x-y)^3$.

9. $x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6$.　　10. $1-12a^2b^2+48a^4b^4-64a^6b^6$.

§4·5 二次三项式 x^2+px+q 的因式分解法

在乘法公式里,我们知道,形如$(x+a)(x+b)$的积是x的二次三项式,就是

$$(x+a)(x+b)=(x+a)x+(x+a)b$$
$$=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab.$$

把上面的演算过程反过来就可以得到

$$x^2+(a+b)x+ab=x^2+ax+bx+ab$$
$$=x(x+a)+b(x+a)$$
$$=(x+a)(x+b).$$

这就告诉我们:对于最高次项的系数是1的二次三项式,如果它的常数项能够分解成两个因数,使它们的代数和恰巧等于x的系数,那末就可以把它分解成两个一次因式.

$$\boldsymbol{x^2+px+q=(x+a)(x+b)}$$
$$(\text{其中 } p=a+b,\ q=ab).$$

例1. 分解 x^2+6x+8 的因式.

分析　因为常数项8是个正数,所以把它分解成两个因数时这两

个因数应当同号．又因为 x 的系数是正数，所以要把常数项分解成两个正的因数．

8 有两种方法分解成两个正因数:

$$8=1\times 8,\ 这时\ 1+8=9\neq 6,$$
$$8=2\times 4,\ 这时\ 2+4=6.$$

由此可以知道,只需把 8 分解成 2×4.

【解】 $x^2+6x+8=x^2+(2+4)x+2\times 4$

$$=x^2+2x+4x+2\times 4$$
$$=x(x+2)+4(x+2)$$
$$=(x+2)(x+4).$$

注 在实际解题时，我们可以把上面演算中的中间步骤省去，直接写出结果，就是

$$x^2+6x+8=(x+2)(x+4).$$

这个例子告诉我们：二次三项式 x^2+px+q 中如果 p 和 q 都是正数，应当把 q 分解成两个正因数.

例 2. 分解因式:

(1) $x^2+7x+12$;　　　　(2) $x^2+12x+20$.

【解】 (1) $\because\ 12=3\times 4$, 而 $3+4=7$,

$\therefore\ x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$.

(2) $\because\ 20=2\times 10$, 而 $2+10=12$,

$\therefore\ x^2+12x+20=(x+2)(x+10)$.

例 3. 分解因式:

$$x^2-8x+15.$$

分析 这里常数项是正数，但是一次项的系数是负数，所以要把常数项拆成两个负数的积，才能使它们的和等于一个负数．因为 $15=(-3)(-5)$ 而 $(-3)+(-5)=-8$，所以令 $a=-3$, $b=-5$ 就可以分解因式.

【解】 $x^2-8x+15=x^2+[(-3)+(-5)]x+(-3)(-5)$

$$=[x+(-3)][x+(-5)]$$

$$=(x-3)(x-5).$$

这个例子告诉我们，二次三项式 x^2+px+q 中，如果 p 是负数，q 是正数，应当把 q 分解成两个负的因数.

例 4. 分解因式：

(1) $x^2-31x+30$;　　　　(2) $x^2-8x+12$.

【解】

(1) $\because$ $30=(-1)(-30)$，而 $(-1)+(-30)=-31$，

$\therefore$ $x^2-31x+30=(x-1)(x-30)$.

(2) $\because$ $12=(-2)(-6)$，而 $(-2)+(-6)=-8$，

$\therefore$ $x^2-8x+12=(x-2)(x-6)$.

例 5. 分解因式：

$$x^2y^2+3xy+2.$$

分析　把原式写成 $(xy)^2+3(xy)+2$，就看出它可用上面的方法来分解因式.

【解】 $\because$ $2=1\times2$，而 $1+2=3$，

$\therefore$ $x^2y^2+3xy+2=(xy+1)(xy+2)$.

例 6. 分解因式：

$$x^2-19xy+90y^2.$$

分析　这个三项式中，每一项都是关于字母 x 和 y 的二次项，并且它是按照 x 的降幂顺序同时又是按照 y 的升幂顺序排列着的. 它也可以仿照例 1 的解法来分解因式.

【解】 $\because$ $90=(-9)(-10)$，而 $(-9)+(-10)=-19$，

$\therefore$ $x^2-19xy+90y^2=x^2-9xy-10xy+90y^2$

$$=x(x-9y)-10y(x-9y)$$

$$=(x-9y)(x-10y).$$

注　1. 这种三项式，叫做 x, y 的二次齐次三项式. 熟练以后，也可以省去中间步骤，直接写出结果，但是要注意分解得到的两个一次因式，每一项中都要含有字母.

2. 也可以把原式看成 $x^2-19y\cdot x+90y^2$，于是现在要找 a, b，使得 $ab=90y^2$, $a+b=-19y$. 从后一式看出，a, b 一定是同类项，因此只要确定它们的系数就可以了.

习　题　4·5(1)

分解下列因式(1～16):

1. $x^2+15x+36$.　　2. $a^2-11a+30$.
3. $x^2+24x+80$.　　4. $a^2-17a+60$.
5. $a^2+19a+60$.　　6. $x^2-23x+60$.
7. x^4+32x^2+60.　　8. $a^2-61a+60$.
9. $a^2b^2+16ab+60$.　　10. $x^2-29x+100$.
11. $a^2+25a+100$.　　12. $a^2+52a+100$.
13. $a^2-3ab+2b^2$.　　14. $x^2+6xy+8y^2$.
15. $a^2+9ay+8y^2$.　　16. $x^2-12xy+27y^2$.

分解下列因式，到不能再分解为止(17～20):

17. $a^3-24a^2b+44ab^2$.　　18. $a^4+9a^3b+18a^2b^2$.
19. a^4-9a^2+8.　　20. a^6+9a^3+8.

例 7. 分解因式:

$$x^2-3x-10.$$

分析　这里常数项是负数，把它分解成两个因数时这两个因数应当有相反的符号. 但是 x 的系数是负数，所以这两个因数中，负的因数的绝对值应较大.

【解】　$\because\ -10=(-5)\times 2$ 而 $(-5)+2=-3$,

$$\therefore\ x^2-3x-10=[x+(-5)](x+2)$$
$$=(x-5)(x+2).$$

例8. 分解因式:

$$a^2+9a-10.$$

分析 这里常数项是负数，a的系数是正数，因此要把 -10 分解成符号相反的两个因数，并且正的因数的绝对值应较大.

【解】 $\because\ -10=(-1)\times 10$，而 $-1+10=9$，

$$\therefore\ a^2+9a-10=[a+(-1)](a+10)$$
$$=(a-1)(a+10).$$

例7和例8告诉我们，如果二次三项式 x^2+px+q 中 q 是负数，那末 q 的两个因数应该一正一负，并且，当

p 是正数时，正的因数的绝对值要较大;

p 是负数时，负的因数的绝对值要较大.

例9. 分解 a^4-21a^2-100 的因式.

分析 把原式写成 $(a^2)^2-21(a^2)-100$，它仍旧是二次三项式的形式，所以可用上面的方法，只是要把原来的 x 代换成 a^2.

【解】 $\because\ -100=(-25)\times 4$，而 $(-25)+4=-21$，

$$\therefore\ a^4-21a^2-100=(a^2-25)(a^2+4)$$
$$=(a-5)(a+5)(a^2+4).$$

注意 a^2-25 还能分解因式，要再分下去.

例10. 分解 $a^3-5a^2b-300ab^2$ 的因式.

分析 先把公因式 a 提出，得另一因式是 $a^2-5ab-300b^2$. 这里 $-300=(-20)\times 15$，而 $(-20)+15=-5$. 它可以用二次三项式的因式分解法来分解.

【解】 $a^3-5a^2b-300ab^2=a(a^2-5ab-300b^2)$

$$=a(a-20b)(a+15b).$$

注意 在每一括号的第二项中，不要忘掉写字母 b.

习　题　4·5(2)

分解因式:

1. x^2-3x-4.
2. $x^2+10x-24$.
3. a^2+a-20.
4. x^2+x-30.
5. $a^2-9a-36$.
6. $x^2-7x-60$.
7. $x^2-7xy-18y^2$.
8. $x^2-6xy-16y^2$.
9. $a^2-12ab-85b^2$.
10. $a^2-9ab-52b^2$.
11. $a^4+a^2b^2-56b^4$.
12. $x^2y^2+7xy-44$.
13. $a^2-16a+60$.
14. $a^2-7a-60$.
15. $a^2+32a+60$.
16. $a^2+11a-60$.
17. $x^2-20xy+96y^2$.
18. $x^2-4xy-96y^2$.
19. $x^2+10xy-96y^2$.
20. $x^2+28xy+96y^2$.

§4·6　因式分解的一般步骤

上面我们学过了多项式因式分解的一些基本方法，利用这些方法可以分解某些多项式的因式．在解题的时候，按照下面的步骤来做，可以使我们容易得出正确的结果．

(1) 先看有没有公因式．如果有，要首先提取出来．

(2) 再看能不能应用各种因式分解的公式．

1) 如果是二项式，看能不能应用平方差公式，或立方和与立方差公式．如果既可以应用平方差公式，又可以应用立方差公式，总要先用平方差公式．

2) 如果是三项式，看能不能应用完全平方式的公式．

3) 如果是四项式，看能不能应用完全立方式的公式．

(3) 如果是二次三项式的形式，看能不能分解成二个一次二项式．

(4) 如果是四项式或四项以上的多项式，看能不能把多项式分成几组，或调换各项次序之后提取多项公因式，或联合应用几种公式.

(5) 在分解因式之后，还要看能不能继续分解，一定要分解到不能分解为止.

(6) 分解得到的结果要进行整理.

1) 在分解因式之后，有相同的因式要写成幂的形式.

2) 在各个因式内，要进行化简.

例 1. 分解因式:

$$a^4b-a^2b^3+a^3b^2-ab^4.$$

【解】 $a^4b-a^2b^3+a^3b^2-ab^4=ab(a^3-ab^2+a^2b-b^3)$

$$\begin{aligned}&=ab[a(a^2-b^2)+b(a^2-b^2)]\\&=ab(a^2-b^2)(a+b)\\&=ab(a+b)(a-b)(a+b)\\&=ab(a+b)^2(a-b).\end{aligned}$$

说明 先提公因式 ab. 再分成两组提出多项公因式 a^2-b^2. 再把 a^2-b^2 分解成 $(a+b)(a-b)$. 两个 $a+b$ 的因式要写成 $(a+b)^2$ 的形式.

例 2. 分解因式:

$$8(x+y)^3-27(x-y)^3.$$

【解】 $8(x+y)^3-27(x-y)^3$

$$\begin{aligned}&=[2(x+y)-3(x-y)][4(x+y)^2\\&\quad+2(x+y)3(x-y)+9(x-y)^2]\\&=(2x+2y-3x+3y)(4x^2+8xy+4y^2\\&\quad+6x^2-6y^2+9x^2-18xy+9y^2)\\&=(5y-x)(19x^2-10xy+7y^2).\end{aligned}$$

说明 先按照立方差公式分解，不要忘记系数 8 就是 2^3，27 就是

3°. 两个因式内部要去掉小括号整理合并同类项. $19x^2-10xy+7y^2$ 虽然是二次三项式的形式,但不能再分解了.

例 3. 分解因式:

$$x^{18}-3x^{12}y^6+3x^6y^{12}-y^{18}.$$

【解】 $x^{18}-3x^{12}y^6+3x^6y^{12}-y^{18}$

$$=(x^6)^3-3(x^6)^2(y^6)+3(x^6)(y^6)^2-(y^6)^3$$
$$=(x^6-y^6)^3=[(x^3+y^3)(x^3-y^3)]^3$$
$$=[(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)]^3$$
$$=(x+y)^3(x^2-xy+y^2)^3(x-y)^3(x^2+xy+y^2)^3.$$

说明 先化成两数差的立方. x^6-y^6 可以用平方差公式继续分解,也可以用立方差公式继续分解,应该用平方差公式,然后再用立方和差公式分解. 注意在括号[ ]外边原来有指数 3,在最后一步中,去掉中括号时,根据积的乘方法则,每个因式都要有指数 3.

例 4. 分解因式:

$$a^2-2ab+b^2-5a+5b+6.$$

【解】 $a^2-2ab+b^2-5a+5b+6$

$$=(a-b)^2-5(a-b)+6$$
$$=[(a-b)-3][(a-b)-2]$$
$$=(a-b-3)(a-b-2).$$

说明 先分成三组,前面三项一组,可化成 $(a-b)^2$,第 4 第 5 项一组,可以提出公因式 -5,这样就化成 $(a-b)$ 的二次三项式的形式,再照二次三项式分解.

例 5. 分解因式:

(1) $-a^2+6ab-9b^2$; (2) $-x^2-3x+4$.

【解】

(1) $-a^2+6ab-9b^2=-(a^2-6ab+9b^2)=-(a-3b)^2$;

(2) $-x^2-3x+4=-(x^2+3x-4)=-(x+4)(x-1)$.

说明 这两个式子在提出负号之后，就比较容易分解因式，但是切勿漏掉负号．如果把 $-a^2+6ab-9b^2$ 做成 $a^2-6ab+9b^2=(a-3b)^2$，$-x^2-3x+4$ 做成 $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$，那就错了。

习 题 4·6

分解因式:

1．$3x^6-192y^6$.

2．$64x^6y^3-y^{15}$.

3．$a^3(a-b)+b^3(b-a)$.

4．$6xy+15x-4y-10$.

5．$3x^4+3x^3-24x-24$.

6．$x^2+a^2-bx-ab+2ax$.

7．$x-x^2+42$.

8．a^5-81ab^4.

9．$x^5-9x^3+8x^2-72$.

10．$x^2(x^2-20)+64$.

11．$x^4-10x^2y^2+9y^4$.

12．$a^4-18a^2b^2c^2+81b^4c^4$.

13．$x^3-ax^2-b^2x+ab^2$.

14．$a^2-9b^2+12bc-4c^2$.

15．x^9-y^9.

16．$a^2+a+b-b^2$.

17．$4(1-b^2-ab)-a^2$.

18．$x^3-7x^2-4x+28$.

19．$4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$.

20．$ab(x^2+1)+x(a^2+b^2)$.

§4·7 最高公因式

在算术里，我们学过几个整数的最大公约数．现在我们先来复习一下最大公约数的意义和求法．

任何一个整数，如果它能够整除另一个整数，就叫它做后一个数的约数（或因数）．例如 12 是 36 的约数，12 也是 60 的约数．几个数共同的约数叫做这几个数的公约数，例如 12 是 36 和 60 的公约数．几个数的公约数可能不止一个，例如 12 是 36 和 60 的公约数，6 也是 36 和 60 的公约数．在几个数的所有公约数里，最大的一个公约数叫做这几个数的最大公约数，例如 12 是 36 和 60 的最大公约数。

要求两个数的最大公约数，要先把这两个数分解成为质因数的连乘积，并把相同的质因数写成幂的形式．把这两个数的所有相同质因数(如果这种质因数是用幂的形式表示的，那末要把次数最低的一个幂选出来)都选取出来，它们的连乘积就是所求的最大公约数．

例 1． 求 36 和 60 的最大公约数．

【解】 $36=2^2\cdot3^2$; $60=2^2\cdot3\cdot5$.

$\therefore$ 36 和 60 的最大公约数是 $2^2\cdot3=12$.

注　对于质因数 2，要取 2^2，因为如果只选用 2，那末 $2\times3=6$，就不是 36 和 60 的最大公约数．对于质因数 3，要取 3，因为如果取 3^2，那末 $2^2\cdot3^2=36$，就不是 60 的约数，因而不是 36 和 60 的公约数了．

例 2． 求 96，192 和 288 的最大公约数．

【解】 先把它们分解成为质因数的连乘积．

$$96=2^5\cdot3,\quad 192=2^6\cdot3,\quad 288=2^5\cdot3^2.$$

$\therefore$ 所求的最大公约数是 $2^5\cdot3=96$.

类似地在代数里，我们有时也要求几个整式的最高公因式．所谓**几个整式的最高公因式**，就是这些整式的公因式中次数最高的式子．现在把求几个整式的最高公因式的方法，举例说明如下：

例 3． 求 $16a^3b^5x^2$，$24a^2b^4x^3$，$-32a^5bx^4y$ 的最高公因式．

【解】 这三个代数式都是单项式，已经都是各个因式的连乘积的形式．我们只要选取它们共有的因式就是了．

拿数字系数来说，16，24，-32 的最大公约数是 8．(负号通常不要选入．)

拿字母因数来说，我们选各个代数式共有的字母，而且选各个字母的最低的幂，得 a^2bx^2.

$\therefore$ 它们的最高公因式是 $8a^2bx^2$.

注　在代数里，我们叫最高公因式而不叫最大公因式，因为我们只考虑它在所有公因式中关于各个字母的次数是最高的，至于它的值，如果字母取小于1的值，那末次数越高，代数式的值是越小的.

例4．求

$$a^4-a^3b+ab^3-b^4,$$

$$a^4-2a^2b^2+b^4,\quad a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$$

的最高公因式.

【解】这几个整式都是多项式，要先分解因式.

$$\begin{aligned}a^4-a^3b+ab^3-b^4&=a^3(a-b)+b^3(a-b)\\&=(a-b)(a^3+b^3)\\&=(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^4-2a^2b^2+b^4&=(a^2-b^2)^2=[(a+b)(a-b)]^2\\&=(a+b)^2(a-b)^2,\end{aligned}$$

$$a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6=(a^2-b^2)^3=(a+b)^3(a-b)^3.$$

∴ 最高公因式是$(a+b)(a-b)$.

例5．求

$$(a-b)(c-a),$$

$$(b-a)(a+c),\quad (a-b)(b+a)$$

的最高公因式.

【解】 $(a-b)(c-a)=-(a-b)(a-c)$;

$(b-a)(a+c)=-(a-b)(a+c)$;

$(a-b)(b+a)=(a-b)(a+b)$.

∴ 最高公因式是$a-b$.

习　题　4·7

求下列各式的最高公因式:

1．$39a^5b^3d^2$, $26a^3b^2$, $-52a^4b^4c^2$.

2．a^2bc+ab^2c, a^2b-b^3, a^5b^7.

3．$(x-y)(y-z)(z-x)$, $(y-x)(z-y)(z+x)$.

4．x^2-3x+2, x^2-4x+3, x^2+x-2.

5. $(x^2-y^2)^2$, $(x+y)^2(x-y)$, $(y-x)^2(y+x)$。

6. $(a^3+b^3)^2$, a^4-b^4, b^2-a^2。

§4·8 最低公倍式

在算术里，我们也学过几个整数的最小公倍数. 现在我们先来复习一下最小公倍数的意义和求法.

一个整数，如果它能够被另外的一个整数整除，就叫它做后一个数的倍数，例如 36 是 12 的倍数，36 也是 18 的倍数. 几个数共同的倍数叫做这几个数的公倍数，例如 36 是 12 和 18 的公倍数. 几个数的公倍数是很多的，例如 36 是 12 和 18 的公倍数，72 也是 12 和 18 的公倍数. 在几个数的所有公倍数里，最小的一个公倍数叫做这几个数的最小公倍数. 例如 36 是 12 和 18 的最小公倍数.

要求两个数的最小公倍数，要先把这两个数分解成质因数的连乘积，并把相同的质因数写成幂的形式. 把两个数的所有的不同质因数（如果某些质因数有幂的形式，要选取次数最高的）都选取出来，它们的连乘积就是所求的最低公倍数.

例 1. 求 12 和 18 的最小公倍数.

【解】 $12=2^2\cdot3$, $18=2\cdot3^2$.

$\therefore$ 12 与 18 的最小公倍数是 $2^2\cdot3^2=36$.

例 2. 求 96, 192 和 288 的最小公倍数.

【解】 $96=2^5\cdot3$, $192=2^6\cdot3$, $288=2^5\cdot3^2$.

$\therefore$ 所求的最低公倍数是 $2^6\cdot3^2=576$.

类似地，如果一个整式 A 能够被另一个整式 B 整除，那末 A 就叫作 B 的倍式. 例如 x^2-y^2 能被 $x-y$ 或者 $x+y$ 整

除，所以 x^2-y^2 是 $x-y$ 的倍式，也是 $x+y$ 的倍式.

几个整式共同的倍式，叫做这几个整式的**公倍式**. 例如，对于两个整式

$$a^2b \quad 和 \quad ab^2$$

来说，下面的这些整式

$$a^2b^2,\ a^2b^3,\ a^3b^2,\ a^4b^2,\ a^2b^4,\ \cdots$$

都是它们的公倍式.

在几个整式的公倍式中，次数最低的一个整式，叫做它们的**最低公倍式**. 例如 a^2b^2 是 a^2b 和 ab^2 的最低公倍式.

求几个整式的最低公倍式的方法，和算术里求几个整数的最小公倍数的方法很相象，举例说明如下.

例 3. 求 $-8x^2y^3z^4$, $-12x^3y^2z$, $-2axy^5z^2$ 的最低公倍式.

【解】 这三个式子都是单项式，已经都是各个因式的连乘积的形式.

拿数字系数来说，8, 12, 2 的最小公倍数是 $2^3\cdot3=24$. (负号通常不要选入，因为没有负号也可以整除.)

对于字母 a, x, y, z 各取最高的幂，是 $ax^3y^5z^4$.

$\therefore$ 这三个代数式的最低公倍式是 $24ax^3y^5z^4$.

例 4. 求 $(a^2-b^2)^2$, $(a^3+b^3)(a^3-b^3)$, $a(b+a)^3$ 的最低公倍式.

【解】 分解各个式子成因式:

$(a^2-b^2)^2=[(a+b)(a-b)]^2=(a+b)^2(a-b)^2$;

$(a^3+b^3)(a^3-b^3)=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

$a(b+a)^3=a(a+b)^3$.

$\therefore$ 最低公倍式是

$$a(a+b)^3(a-b)^2(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2).$$

例 5. 求 x^2+y^2, y^2-x^2, x^3-y^3 的最低公倍式.

【解】 分解因式:

$$x^2+y^2=x^2+y^2;$$

$$y^2-x^2=-(x^2-y^2)=-(x+y)(x-y);$$

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

∴ 最低公倍式是 $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

说明 x^2+y^2 与 $x+y$ 不同,不要把 x^2+y^2 当作 $(x+y)^2$.

习 题 4·8

求下列各式的最低公倍式:

1. $39a^5b^3d^2$, $26a^3b^2$, $-52a^4b^4c^2$.
2. a^2bc+ab^2c, a^2b-b^3, a^5b^7.
3. $(x-y)(y-z)(x+z)$, $(y-x)(z-y)(z+x)$.
4. x^2-3x+2, x^2-4x+3, x^2+x-2.
5. $(x^2-y^2)^2$, $(x+y)^2(x-y)$, $(y-x)^2(y+x)$.
6. $(a^3+b^3)^2$, a^4-b^4, b^2-a^2.

本 章 提 要

1 因式分解的方法及公式

(1) $ab+ac+ad=a(b+c+d)$;

(2) $ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$;

(3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;

(4) $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$;

(5) $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$;

(6) $a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$;

(7) $x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

$(a+b=p,\ ab=q)$

2 最高公因式与最低公倍式

名　　称	意　　义	因式选取法	
		因式种类	因式的指数
几个整式的最高公因式	能整除各式的次数最高的整式	各式所有相同的因式	各式中最低的指数
几个整式的最低公倍式	能被各式整除的次数最低的整式	各式所有不同的因式	各式中最高的指数

复习题四

1．回答下列问题:

什么叫做多项式的因式分解?

多项式的因式分解有那些方法? 有那些公式? 因式分解的公式与乘法公式有什么联系,又有什么区别?

多项式的因式分解的步骤怎样?

2．什么叫做几个整式的最高公因式? 怎样求法?

什么叫做几个整式的最低公倍式? 怎样求法?

下列因式分解,是否正确? 如有错误,改正右边(3～14):

3．$a^2-b^2=(a-b)^2$.

4．$a^2-4b^2=(a+4b)(a-4b)$.

5．$16a^{16}-b^2=(4a^4+b)(4a^4-b)$.

6．$a^2-(b+c)^2=(a+b+c)(a-b+c)$.

7．$-a^2+2ab-b^2=(a-b)^2$.

8．$a(x-1)^2-b(x-1)=(x-1)^2(a-b)$.

9．$a^2+a-b^2-b=a(a+1)-b(b+1)=(a-b)(a+1)(b+1)$.

10．$a^2-b^2+2bc-c^2=a^2-(b+c)^2=(a+b+c)(a-b-c)$.

11．$(a^2-b^2)(a^3-b^3)=(a+b)(a-b)(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$$=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

12．$(a^3+b^3)^2=(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$.

13．$x^2-5x-6=(x-3)(x-2)$.

14．$x^2-x-6=(x-2)(x+3)$.

分解下列各式的因式(15～44):

15. $a^4-a^2b^2$.

16. $ax^2(m-n)+3x(n-m)$.

17. $3ab(c-d)-9b^2(d-c)$.

18. $(x+y)^3-4xy(x+y)$.

19. $x^5+x^4+x^2+x$.

20. $ax-a+x-1$.

21. $bx+1-b-x$.

22. $ax-bx-b+a$.

23. $ax-ay+bx+cy-cx-by$.

24. $3x^2y^2-9xy-12$.

25. a^2-b^2-a+b.

26. $a^2+4ab+4b^2-9c^2$.

27. $a^2+2ab+b^2-4a-4b$.

28. a^4c-c^5.

29. $a^2-x^2-ab-bx$.

30. x^4+6x^2-135.

31. x^3-5x^2-24x.

32. $a^4x^4-a^3x^3-a^2x^2+1$.

33. $5a^2-5b^2-3a+3b$.

34. $4-x^2+2x^3+x^4$.

35. $a^{12}b+b^{13}$.

36. $a^2+b^2+2(ab+ac+bc)$.

37. $a^3-b^3+a(a^2-b^2)+b(a-b)^2$.

38. $(x^2-y^2-z^2)^2-4y^2z^2$.

39. $x^2+2xy+y^2-x-y-6$.

40. $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$.

41. $a^2-b^2+x^2-y^2+2(ax-by)$.

42. $x^6-27y^6-x^4+9y^4$.

43. $x^{24}-y^{24}$.

44. x^4-x^3+8x-8.

利用因式分解,计算下列各式(45～48):

45. 354^2-353^2.

46. 82^2-80^2.

47. $1.36^2-0.36^2$.

48. $54.1^2-51.1^2$.

求下列各代数式的值(49～50):

49. a^2-b^2, 其中 $a=-5.6$, $b=4.6$.

50. a^2-4b^2, 其中 $a=-3.8$, $b=-3.1$.

用两种不同方法,求出下列的积(51～52):

51. $(a^2+2ab+b^2)(a^2-2ab+b^2)$.

[提示: (1) $(a+b)^2(a-b)^2=[(a+b)(a-b)]^2=(a^2-b^2)^2=\cdots$,

(2) $[(a^2+b^2)+2ab][(a^2+b^2)-2ab]=\cdots$.]

52. $(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$.

化简(53～55):

53. $(a+2b)^3-(a-2b)^3$.

54. $(8a^6+27b^6)\div(2a^2+3b^2)-(8a^6-27b^6)\div(2a^2-3b^2)$.

55. $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)-(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$.

用简便的方法求下列各代数式的值(56～60):

56. $(a^2-b^2)\div(a-b)+(a-b)^2\div(a-b)$, 当 $a=3\frac{3}{5}$.

57. $(a^3+b^3)\div(a+b)-(a+b)^3\div(a+b)$, 当 $a=-3\frac{1}{3}$, $b=\left|-2\frac{1}{2}\right|$.

58. $(a-b)(a^2+ab+b^2)+3ab(b-a)$, 当 $a=-3.7$, $b=6.3$.

59. $xy+1-x-y$, 当 $x=0.99$, $y=1.03$.

60. $(a+b)(a^2-ab+b^2)-9b^3$, 当 $a=-4.368$, $b=-2.184$.

*分解因式(61～65):

61. $x^4+x^2y^2+y^4$. [提示: 变成 $x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$.]

62. $4x^4+1$. [提示: 变成 $4x^4+4x^2+1-4x^2$.]

63. $x^4+5x^2y^2+9y^4$.

64. $4a^4-24a^2b^2+25b^4$.

65. $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$.

[提示: 变成 $x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2-4x^2y^2$.]

第五章　分　　式

在第三章里，我们讨论了整式的除法．但是整式的除法不一定都能够整除，例如 x^2+3x+5 就不能被 $x+1$ 整除．和整数除法里由于不能整除因而有分数的表达形式一样，在代数里，我们还必须进一步研究整式以外的另一种有理代数式——分式．

§5·1　分　　式

1．分式的概念　代数式 $\frac{1}{a}$，$\frac{x-1}{x+5}$，$\frac{x^2-a^2}{3ax^2}$，$\frac{x^2+3x+5}{x+1}$，$\frac{5}{(x+y)(x-y)}$ 等都是有理代数式，但除式里含有字母，我们把它们叫做分式．就是

除式里含有字母的有理代数式叫做**分式**．

分式的写法，和分数一样，用一条横线作为除号，把被除式写在横线的上面，叫做分子，除式写在横线的下面，叫做分母．例如在分式 $\frac{1}{a}$ 里，分子是 1，分母是 a；在分式 $\frac{x-1}{x+5}$ 里，分子是 $x-1$，分母是 $x+5$ 等．

注意　$\frac{a+b}{2}$，$\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x-5$ 等不是分式，因为这里没有含字母的除式．这两个代数式都是整式．

2．分式里字母的值的限制　我们知道，任意有理数总可以进行加法、减法和乘法的运算，所以在整式里，字母可以

取任意数值．但是在分式里，分母所包含的字母，就不一定可以取任意值．例如分式 $\frac{a}{b}$ 就表示 a 除以 b 所得的商，这里分子 a 可以取任意数值，但分母 b 不能是零（因为用零做除数是没有意义的）．一般地说，在一个分式里，分子中的字母可以取任意的数值，但是分母中的字母，只能取不使分母等于零的值．

例 1．下列各分式里，字母 x 的值有什么限制？

(1) $\frac{1}{x}$；　(2) $\frac{x+3}{x-2}$；　(3) $\frac{5}{x+2}$；　(4) $\frac{x+a}{x-a}$．

【解】 (1) 在 $\frac{1}{x}$ 里，x 不能是零，即 $x\neq0$；

(2) 在 $\frac{x+3}{x-2}$ 里，由于 $x=2$ 时，$x-2=0$，所以 $x\neq2$；

(3) 在 $\frac{5}{x+2}$ 里，由于 $x=-2$ 时，$x+2=0$，所以 $x\neq-2$；

(4) 在 $\frac{x+a}{x-a}$ 里，由于 $x=a$ 时，$x-a=0$，所以 $x\neq a$．

以后我们遇到分式，总假定分式里字母所取的值不会使分母等于零．

3．分式的值　分式是一个代数式，所以我们可以按照求代数式的值的方法，把分式里的字母用指定的数值代入，按照指定的运算进行计算化简，就可以得出分式的值来．

例 2．求代数式 $\frac{x-1}{x+3}$ 的值：

(1) 当 $x=2$；　(2) 当 $x=-2$；　(3) 当 $x=-4$；

(4) 当 $x=\frac{2}{5}$；　(5) 当 $x=1$．

【解】

(1) 当 $x=2$ 时，$\frac{x-1}{x+3}=\frac{2-1}{2+3}=\frac{1}{5}$；

(2) 当 $x=-2$ 时，$\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{-2-1}{-2+3}=-3$;

(3) 当 $x=-4$ 时，$\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{-4-1}{-4+3}=5$;

(4) 当 $x=\dfrac{2}{5}$ 时，$\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{\dfrac{2}{5}-1}{\dfrac{2}{5}+3}=\dfrac{\dfrac{-3}{5}}{\dfrac{17}{5}}=-\dfrac{3}{17}$;

(5) 当 $x=1$ 时，$\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{1-1}{1+3}=\dfrac{0}{4}=0$.

例 3. 求代数式 $\dfrac{2xy}{2x-3y}$ 的值:

(1) 当 $x=3$, $y=1$;

(2) 当 $x=7$, $y=3$;

(3) 当 $x=-2$, $y=-4$;

(4) 当 $x=-2\dfrac{1}{2}$, $y=3\dfrac{1}{2}$;

(5) 当 $x=0$, $y=-1$.

【解】

(1) 当 $x=3$, $y=1$ 时,

$$\frac{2xy}{2x-3y}=\frac{2\cdot3\cdot1}{2\cdot3-3\cdot1}=\frac{6}{3}=2;$$

(2) 当 $x=7$, $y=3$ 时,

$$\frac{2xy}{2x-3y}=\frac{2\cdot7\cdot3}{2\cdot7-3\cdot3}=\frac{42}{5}=8\frac{2}{5};$$

(3) 当 $x=-2$, $y=-4$ 时,

$$\frac{2xy}{2x-3y}=\frac{2\cdot(-2)(-4)}{2(-2)-3(-4)}=\frac{16}{-4+12}=2;$$

(4) 当 $x=-2\dfrac{1}{2}$, $y=3\dfrac{1}{2}$ 时,

$$\frac{2xy}{2x-3y}=\frac{2\left(-2\frac{1}{2}\right)\left(3\frac{1}{2}\right)}{2\left(-2\frac{1}{2}\right)-3\left(3\frac{1}{2}\right)}=\frac{2\left(-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)}{-5-\frac{21}{2}}$$

$$=\frac{\frac{-35}{2}}{-\frac{31}{2}}=\frac{35}{31}=1\frac{4}{31};$$

(5) 当 $x=0$, $y=-1$ 时,

$$\frac{2xy}{2x-3y}=\frac{2\cdot0(-1)}{2\cdot0-3(-1)}=\frac{0}{3}=0.$$

习 题 5·1

1. 下列各代数式里,哪些是整式? 哪些是分式?

$3x$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{5}{x+3}$, $\frac{1}{2}x^2-3$, $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

2. 下列各代数式里,哪些字母的值有哪些限制?

(1) $\frac{a+7}{a-5}$; (2) $\frac{a}{a+4}$; (3) $\frac{x-5}{3-x}$; (4) $\frac{x+3}{x}$.

求下列各分式的值:

3. $\frac{1}{x}$; (1) $x=3$; (2) $x=\frac{1}{3}$; (3) $x=-\frac{2}{5}$; (4) $x=0.02$.

4. $\frac{x-2}{x+3}$; (1) $x=5$; (2) $x=-5$; (3) $x=1\frac{1}{3}$; (4) $x=2$.

5. $\frac{2x+7}{x^2-2x+3}$; (1) $x=-1$; (2) $x=-\frac{1}{2}$; (3) $x=0$; (4) $x=0.2$.

6. $\frac{1}{x^2-4}$; (1) $x=3$; (2) $x=-3$; (3) $x=\frac{1}{3}$; (4) $x=-\frac{1}{3}$.

7. $\frac{x^2-3x-4}{2x-3}$; (1) $x=4$; (2) $x=-1$; (3) $x=1$; (4) $x=0$.

8. $\frac{a+b}{a-b}$; (1) $a=3$, $b=-3$; (2) $a=5$, $b=-7$.

9. $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}$; (1) $a=3, b=2$; (2) $a=3, b=-3$.

10. $\dfrac{a^2-2ab-3b^2}{a^2-3ab+b^2}$; (1) $a=2b$; (2) $a=3b$.

11. $\dfrac{x^2-5ax+8a^2}{x^2-3ax+2a^2}$; (1) $x=3a$; (2) $x=-3a$.

12. $\dfrac{x^3+2ax^2-3a^2x+4a^3}{x^3-3ax^2-5a^2x+6a^3}$; (1) $x=\dfrac{1}{2}a$; (2) $x=-\dfrac{2}{3}a$.

§5·2 分式的基本性质

在算术里，我们已经知道，分数的分子和分母都乘以不是零的相同的数，分数的值不变．例如

$$\frac{1}{3}=\frac{1\times 2}{3\times 2}=\frac{2}{6};\quad \frac{12}{18}=\frac{12\times\dfrac{1}{6}}{18\times\dfrac{1}{6}}=\frac{2}{3}.$$

这一性质叫做分数的基本性质．

在学到有理数以后，这一性质可以推广到分子分母是负数的分数．例如

$$\frac{-3}{-8}=\frac{-3\times(-1)}{-8\times(-1)}=\frac{3}{8};$$

$$\frac{3}{-15}=\frac{3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)}{-15\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=\frac{-1}{5}.$$

分式的分子分母实际上都是数，而代数式的值也总是一个数，所以这一性质还可以推广到分式．

因此得到**分式的基本性质**：分式的分子和分母都乘以或除以不等于零的相同的代数式，分式的值不变．即

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}=\frac{a\div m}{b\div m}\quad(m\neq 0).$$

例 1. 把分式 $\frac{ay}{ax}$ 的分子分母都除以 a。

【解】 $\frac{ay}{ax}=\frac{ay\div a}{ax\div a}=\frac{y}{x}$.

说明 这里 a 不会等于 0，因为如果 a 等于 0，那末原来的分式 $\frac{ay}{ax}$ 就没有意义了。

例 2. 把分式 $\frac{-5}{3-a}$ 的分子分母都乘以 -1。

【解】 $\frac{-5}{3-a}=\frac{-5\times(-1)}{(3-a)\times(-1)}=\frac{5}{a-3}$.

例 3. 把分式 $\frac{2x}{6x-8}$ 的分子分母都除以 2。

【解】 $\frac{2x}{6x-8}=\frac{2x\div 2}{(6x-8)\div 2}=\frac{x}{3x-4}$.

例 4. 把分式 $\frac{x^2}{3x^4}$ 的分子分母都除以 x^2。

【解】 $\frac{x^2}{3x^4}=\frac{x^2\div x^2}{3x^4\div x^2}=\frac{1}{3x^2}$.

习 题 5·2

1. 把 $\frac{ax}{a^2x^3}$ 的分子分母都除以 ax。

2. 把 $\frac{3-x}{5-x-x^2}$ 的分子分母都乘以 -1。

3. 把 $\frac{3-x}{5-x-x^2}$ 的分子分母都除以 -1。

4. 把 $\frac{x^3}{x^9}$ 的分子分母都除以 x^3。

5. 把 $\frac{x^3}{x^{12}-x^6}$ 的分子分母都除以 x^3.

6. 把 $\frac{a^2}{a^{16}}$ 的分子分母都除以一个适当的代数式，使分子变做 1.

§5·3　分式中分子和分母的符号变换

根据有理数的除法法则，我们有

$$\frac{+3}{+5}=+\frac{3}{5};\quad \frac{-3}{-5}=+\frac{3}{5};\quad \frac{-3}{+5}=-\frac{3}{5};\quad \frac{+3}{-5}=-\frac{3}{5}.$$

从这里可以看出，一个分数的分子分母都有性质符号，分数本身也有性质符号.

我们还可以看出

$$\frac{-3}{-5}=\frac{+3}{+5},\quad \frac{+3}{-5}=\frac{-3}{5}.$$

那就是说，分子分母都改变性质符号，根据分数的基本性质，分数的值是不变的.

我们还可以看出

$$\frac{-3}{+5}=-\frac{+3}{+5},\quad \frac{+3}{-5}=-\frac{+3}{+5}.$$

那就是说，分子分母中一个改变性质符号，另一个不改变性质符号，那末必须改变分数本身的性质符号，才能与原来的分数相等.

因为分式的分子分母表示的是数，所以这些性质也适用于分式. 于是有**分式的分子分母变换符号的法则**：

$$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b};\quad \frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}.$$

例 1. 把分母里的负号去掉，但要保持分式的值不变：

(1) $\frac{5}{-3x}$;　　(2) $\frac{-x}{-a^2bc}$;

(3) $-\frac{b^2}{-a^2}$;　　(4) $-\frac{-bc}{-a}$.

【解】 (1) 把分母的负号改为正号，要同时把分子也改变符号或者在分式前面添上负号，得

$$\frac{5}{-3x}=\frac{-5}{3x} \quad 或 \quad \frac{5}{-3x}=-\frac{5}{3x};$$

(2) 分子分母同时去掉负号，得

$$\frac{-x}{-a^2bc}=\frac{x}{a^2bc};$$

(3) 把分母与分式前面的负号同时去掉，得

$$-\frac{b^2}{-a^2}=\frac{b^2}{a^2};$$

(4) 去掉分母的符号之后，要把分子或分式前面的负号中再去掉一个，得

$$-\frac{-bc}{-a}=-\frac{bc}{a} \quad 或 \quad -\frac{-bc}{-a}=\frac{-bc}{a}.$$

例 2. 整理下列分式，依照 x 的降幂排列分子分母的各项，并使分子分母的第一项前面都是正号：

(1) $\frac{5+x}{3-x}$;　　(2) $\frac{5-x}{x-x^2+3}$;

(3) $-\frac{5+x-x^2}{3+x}$;　　(4) $-\frac{-2+x+2x^2}{-1-x-x^2}$.

【解】

(1) $\frac{5+x}{3-x}=\frac{x+5}{-x+3}=-\frac{x+5}{(-x+3)(-1)}=-\frac{x+5}{x-3}$;

(2) $\frac{5-x}{x-x^2+3}=\frac{-x+5}{-x^2+x+3}=\frac{(-x+5)(-1)}{(-x^2+x+3)(-1)}$

$$=\frac{x-5}{x^2-x-3};$$

(3) $-\dfrac{5+x-x^2}{3+x}=-\dfrac{-x^2+x+5}{x+3}=\dfrac{x^2-x-5}{x+3}$;

(4) $-\dfrac{-2+x+2x^2}{-1-x-x^2}=-\dfrac{2x^2+x-2}{-x^2-x-1}=\dfrac{2x^2+x-2}{x^2+x+1}$.

习 题 5·3

把分母里的负号去掉，但要所得的分式与原式相等：

1. $\dfrac{-5b}{-3a}$. 2. $\dfrac{x}{-5a}$. 3. $-\dfrac{7xy^2}{-12a^3b^2}$. 4. $-\dfrac{-5y}{-7x}$.

整理下列分式，使分子分母都按照 x 的降幂排列，并使分子分母的第一项前面都是正号：

5. $\dfrac{12-x}{3-x}$. 6. $-\dfrac{1-x+x^2}{3+x-x^2}$. 7. $\dfrac{1-x^2+x}{-5+x}$.

8. $\dfrac{3-x-x^2}{1-2x+x^2}$. 9. $\dfrac{7-x}{-(5-x-x^2)}$. 10. $-\dfrac{1+x-2x^2+3x^3}{1-x+2x^2-3x^3}$.

§5·4 约　分

1. 约分的概念 在算术里，我们已经使用过约分来化简一个分数. 在代数里，我们也可以应用分式的基本性质，把分式的分子分母同除以一个它们的公因式，把分式化简（或约简），这样一种变换叫做约分.

例如把分式 $\dfrac{a^2b}{2ab^2}$ 的分子分母同除以 ab，得到 $\dfrac{a^2b\div ab}{2ab^2\div ab}=\dfrac{a}{2b}$，这样，就把原分式 $\dfrac{a^2b}{2ab^2}$ 约简了.

2. 最简分式（既约分式） 一个分式的分子分母，如果没有 1 以外的公因式，就叫做**最简分式**或者**既约分式**. 如 $\dfrac{a}{3x}$，$\dfrac{x-y}{x+y}$ 等都是最简分式，而 $\dfrac{a}{a^2}$，$\dfrac{x+y}{x^2-y^2}$ 等就不是最简分式.

一个分式如果不是最简分式，我们就应该进行约分，把它化成最简分式.

3．约分的方法

(1) 分式的分子分母是同底数的幂的约分.

例 1．化简：(1) $\frac{a^8}{a^3}$；(2) $\frac{a^5}{a^5}$；(3) $\frac{a^4}{a^9}$；(4) $\frac{a^5}{a^{10}}$.

【解】 (1) $\frac{a^8}{a^3}=\frac{a^8\div a^3}{a^3\div a^3}=\frac{a^5}{1}=a^5$;

(2) $\frac{a^5}{a^5}=\frac{a^5\div a^5}{a^5\div a^5}=\frac{1}{1}=1$;

(3) $\frac{a^4}{a^9}=\frac{a^4\div a^4}{a^9\div a^4}=\frac{1}{a^5}$;

(4) $\frac{a^5}{a^{10}}=\frac{a^5\div a^5}{a^{10}\div a^5}=\frac{1}{a^5}$.

一般说来，$\frac{a^m}{a^n}$ 可以分三种情况进行化简：

(1) 当 $\boldsymbol{m>n}$ 时，$\frac{\boldsymbol{a^m}}{\boldsymbol{a^n}}=\boldsymbol{a^{m-n}}$;

(2) 当 $\boldsymbol{m=n}$ 时，$\frac{\boldsymbol{a^m}}{\boldsymbol{a^n}}=\frac{\boldsymbol{a^n}}{\boldsymbol{a^n}}=\boldsymbol{1}$;

(3) 当 $\boldsymbol{m<n}$ 时，$\frac{\boldsymbol{a^m}}{\boldsymbol{a^n}}=\frac{\boldsymbol{a^m\div a^m}}{\boldsymbol{a^n\div a^m}}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a^{n-m}}}$.

例 2．化简：(1) $\frac{x^8}{x^2}$；(2) $\frac{x^4}{x^8}$；(3) $\frac{x^3}{x^9}$；(4) $\frac{x^4}{x^{12}}$.

【解】 (1) $\frac{x^8}{x^2}=x^{8-2}=x^6$;

(2) $\frac{x^4}{x^8}=\frac{1}{x^{8-4}}=\frac{1}{x^4}$;

(3) $\frac{x^3}{x^9}=\frac{1}{x^{9-3}}=\frac{1}{x^6}$;

(4) $\frac{x^4}{x^{12}}=\frac{1}{x^{12-4}}=\frac{1}{x^8}$.

注意 $\frac{x^8}{x^2}$ 不等于 x^4，$\frac{x^4}{x^8}$ 不等于 $\frac{1}{x^2}$，$\frac{x^3}{x^9}$ 不等于 $\frac{1}{x^3}$.

习　题　5·4(1)

化简(m, n 是自然数)：

1. $\frac{a^{12}}{a^4}$.　2. $\frac{a^9}{a^{12}}$.　3. $\frac{x^{12}}{x^{24}}$.　4. $\frac{(a^4)^3}{a^{12}}$.

5. $\frac{(-a)^7}{a^7}$.　6. $\frac{(-x)^4}{x^4}$.　7. $\frac{a^8}{(a^4)^4}$.　8. $\frac{(a^6)^3}{(a^6)^6}$.

9. $\frac{(a^3)^2}{a^4}$.　10. $\frac{(a^3)^5}{(a^4)^5}$.　11. $\frac{a^{2m}}{a^m}$.　12. $\frac{a^{2n}}{a^{3n}}$.

13. $\frac{a^{2m}}{a^{2m+n}}$.　14. $\frac{a^{6m}}{a^{9m+n}}$.　15. $\frac{a^{m-n}}{a^{m+n}}(m>n)$.　16. $\frac{a^{2m+2n}}{a^2}$.

(2) 分式的分子分母都是单项式的约分.

例 3. 化简：

(1) $\frac{32x}{72y}$;　(2) $\frac{-15ab^2x^{15}}{5abx^5}$;

(3) $\frac{-a^3x^3}{-a^7x^6y^3}$;　(4) $\frac{+20a^5b^2y^{20}}{-96a^3b^4x^5y^{10}}$.

【解】 把系数和各相同字母分别约简：

(1) $\frac{32x}{72y}=\frac{4x}{9y}$;

(2) $\frac{-15ab^2x^{15}}{5abx^5}=\frac{-3bx^{10}}{1}=-3bx^{10}$;

说明　分母的因式约去后得 1，分式变成整式.

(3) $\frac{-a^3x^3}{-a^7x^6y^3}=\frac{1}{a^4x^3y^3}$;

说明　分子的因式约去后得 1.

(4) $\dfrac{+20a^5b^2y^{20}}{-96a^3b^4x^5y^{10}}=-\dfrac{5a^2y^{10}}{24b^2x^5}$.

说明　分母的负号一般要移去.

习　题　5·4(2)

化简:

1. $\dfrac{16a^3b^2c^3}{24a^2b^3c^2}$.　　2. $\dfrac{15bx^2y^3z^4}{25ay^2z^3}$.　　3. $\dfrac{-25a^{25}}{-15a^{15}}$.

4. $\dfrac{144a^4b^{12}c^{15}}{-128a^3b^8c^{18}}$.　　5. $\dfrac{(a^2b^3)^2}{a^3b^7}$.　　6. $\dfrac{(a^2b^3)^3\cdot ab^2}{(a^5b^4)^3}$.

7. $\dfrac{-32a^3b^5x^2y^3}{(24a^2b^3xy^4)^2}$.　　8. $\dfrac{(-a^2b^5)^3\cdot(xy)^2}{(-ax^3)^4\cdot(by^2)^2}$.

9. $\dfrac{3a^{m+1}b^{n+2}}{30a^mb^n}$.　　10. $\dfrac{2a^mb^{2n+1}}{6a^{2m+1}b^{3n+4}}$.

(3) 分式的分子分母是多项式的约分.

例 4. 化简:

(1) $\dfrac{x-y}{x^2-y^2}$;　　(2) $\dfrac{(a-b)^3}{a^3-b^3}$;

(3) $\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-3x+2}$;　　(4) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$.

【解】 先分解因式,再约简:

(1) $\dfrac{x-y}{x^2-y^2}=\dfrac{x-y}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{1}{x+y}$.

注意　(1) 不要把 $\dfrac{x-y}{x^2-y^2}$ 约做 $\dfrac{\cancel{x}-\cancel{y}}{x^{\cancel{2}}-y^{\cancel{2}}}=\dfrac{1}{x-y}$, 这是错误的.

(2) 最后结果不要写做 $\dfrac{1}{(x+y)}$, 因为分式的横线就表示括号,再用括号就多余了.

(2) $\dfrac{(a-b)^3}{a^3-b^3}=\dfrac{(a-b)^3}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}=\dfrac{(a-b)^2}{a^2+ab+b^2}$;

(3) $\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x+5)(x-1)}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{x+5}{x-2}$.

注意 不要把 $\frac{x^2+4x-5}{x^2-3x+2}$ 约做 $\frac{4x-5}{-3x+2}$，因为这样是分子分母都减去 x^2，不是同除以相同的代数式.

$$(4)\quad \frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=\frac{x^2(x-1)+(x-1)}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}$$

$$=x^2+1.$$

注意 不要把 $\frac{x^3-x^2+\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}}$ 约做 x^3-x^2，这是错误的.

例 5. **化简:**

(1) $\frac{(1-x)^2(1+x)^2}{(x^2-1)^2}$; (2) $\frac{(x^2-x-2)^3}{(x^2-1)^3(2-x)^3}$.

【解】

$$(1)\quad \frac{(1-x)^2(1+x)^2}{(x^2-1)^2}=\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{[(x+1)(x-1)]^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2}=1;$$

说明 $(1-x)^2=(x-1)^2$.

$$(2)\quad \frac{(x^2-x-2)^3}{(x^2-1)^3(2-x)^3}=\frac{[(x-2)(x+1)]^3}{-[(x+1)(x-1)]^3(x-2)^3}$$

$$=\frac{(x-2)^3(x+1)^3}{-(x+1)^3(x-1)^3(x-2)^3}$$

$$=\frac{-1}{(x-1)^3}.$$

说明 $(2-x)^3=-(x-2)^3$.

习　题　5·4(3)

约简(1～16):

1. $\frac{a+b}{a^3+b^3}$.　　2. $\frac{a+b}{a^4-b^4}$.　　3. $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$.

4. $\frac{a^3-b^3}{(a-b)^3}$.　　5. $\frac{ab}{a^2b-ab^2}$.　　6. $\frac{x^3-x^2y}{2xy}$.

7. $\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$.　　8. $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

9. $\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64}$.　　10. $\dfrac{a^2+a-6}{a^2+5a+6}$.

11. $\dfrac{a^3-a^2+a-1}{a(a-1)}$.　　12. $\dfrac{(x^3+y^3)(x^2+xy+y^2)}{(x^3-y^3)(x^2-xy+y^2)}$.

13. $\dfrac{(a-b)(a^2-b^2)}{(a^2+ab)(a^2-ab)}$.　　14. $\dfrac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{(a^3-b^3)(a^3+b^3)}$.

15. $\dfrac{a^2-(b+c+d)^2}{(a-b)^2-(c+d)^2}$.　　16. $\dfrac{[x^2-(y-z)^2][z^2-(x-y)^2]}{[y^2-(z-x)^2][(y+z)^2-x^2]}$.

化成最简分式后，再求值(17～18)：

17. $\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$，(1) $x=31$; (2) $x=-49$.

18. $\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-9x+18}$，(1) $x=-7$; (2) $x=3.1$.

化简(19～30)：

19. $\dfrac{a^2-b^2}{a(b^2-a^2)}$.　　20. $\dfrac{(a+b)^3(b-a)^3}{(a^2-b^2)^3}$.

21. $\dfrac{(a^2-b^2)^3}{(a^2-2ab+b^2)^3}$.　　22. $\dfrac{(a-b)^5}{(b^2-2ab+a^2)^3}$.

23. $\dfrac{(a^2-b^2)(ab-a^2-b^2)}{(b^3+a^3)(b^3-a^3)}$.　　24. $\dfrac{(a^2-b^2)^7}{(b-a)^7(b+a)^5}$.

25. $\dfrac{(a^3-b^3)^3}{(b-a)^3}$.　　26. $\dfrac{(6y-x)(y+x)^3}{(x^2-5xy-6y^2)^2}$.

27. $\dfrac{(1-a)(2+a)(a+3)}{(a-1)(a-2)(a-3)}$.　　28. $\dfrac{(b-a)(c-b)(a+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

29. $\dfrac{(b-a)^2(b+c)^2(a-c)^2}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$.　　30. $\dfrac{(b-a)^5(a+b)^4}{(a-b)^5(b+a)^5}$.

§5·5 通　　分

1. 通分的概念　在演算分数加减法的时候，我们需要把两个或两个以上的分数进行通分，使它们变成分母相同而

又和原来的分数分别相等的分数. 同样，我们在分式的加减运算中，也需要把两个或两个以上的分式变成分母相同而又分别与原来的分式相等的分式，便于加减. 这种把两个或两个以上的分式化成分母相同的过程叫做**通分**.

2．通分的方法 在算术里，通分时要先求出几个分数的分母的最小公倍数，作为这几个分数的最小公分母，然后应用分数的基本性质，把每一个分数的分子分母，同乘以一个适当的数，使变成与原分数相等而以这个最小公分母做分母的分数.

例 1. 把分数 $\frac{5}{12}$ 与 $\frac{7}{18}$ 通分.

先求分母 12 与 18 的最小公倍数：

$$12=2^2\cdot3,\quad 18=2\cdot3^2;$$

$\therefore$ 12 与 18 的最小公倍数是 $2^2\cdot3^2=36$.

这两个分数的最小公分母是 36.

其次，应用分数的基本性质，把两个分数都变成分母是 36 的分数：

$$\frac{5}{12}=\frac{5\times3}{12\times3}=\frac{15}{36};\quad \frac{7}{18}=\frac{7\times2}{18\times2}=\frac{14}{36}.$$

分式的通分方法，也是类似的，举例如下：

例 2. 把分式 $\frac{5}{3a^2bc}$, $\frac{7}{12a^3c^2}$, $\frac{-3}{8bc^4}$ 通分.

【解】 先求三个分式的分母的最低公倍式. 因为三个分式的分母都是单项式，所以从观察就可以得到它们的最低公倍式是 $3\cdot2^3a^3bc^4=24a^3bc^4$, $24a^3bc^4$ 叫做这三个分式的**最简公分母**.

然后把三个分式都化到与原来的分式相等而分母等于 $24a^3bc^4$ 的分式，各分式可以同乘以适当的因式，得

$$\frac{5}{3a^2bc}=\frac{5\cdot 8ac^3}{3a^2bc\cdot 8ac^3}=\frac{40ac^3}{24a^3bc^4};$$

$$\frac{7}{12a^3c^2}=\frac{7\cdot 2bc^2}{12a^3c^2\cdot 2bc^2}=\frac{14bc^2}{24a^3bc^4};$$

$$\frac{-3}{8bc^4}=\frac{-3\cdot 3a^3}{8bc^4\cdot 3a^3}=\frac{-9a^3}{24a^3bc^4}.$$

注　通分是和约分相反的一种变换. 约分把分子分母的所有公因式约掉，将分式化成较简单的形式. 通分是把每一个分式的分子分母同乘以相同的因式，使较简单的分式变为较复杂的形式. 约分是对一个分式来说的，通分则总是对两个或两个以上的分式来说的. 通分和约分的变换过程，都是根据分式的基本性质来进行的. 我们必须保证每一个分式经过变换之后的结果，与原分式相等.

例 3. 把分式 $\frac{5}{a-3}$，$\frac{7}{a+3}$ 通分.

【解】 两个分式的分母都是两项式，而且没有公因式. 所以这两个分母的最低公倍式就是它们的积，这个最低公倍式，就是这两个分式的最简公分母.

$$\frac{5}{a-3}=\frac{5(a+3)}{(a-3)(a+3)}=\frac{5a+15}{(a-3)(a+3)};$$

$$\frac{7}{a+3}=\frac{7(a-3)}{(a-3)(a+3)}=\frac{7a-21}{(a-3)(a+3)}.$$

说明　在分式里，分母要尽可能写成因式相乘的形式，不要乘起来，分子一般可以乘出来.

例 4. 通分：$\frac{4}{x^2-9x+20}$，$\frac{2}{x^2-11x+30}$.

【解】 为了要求这两个分式的最简公分母，先要把两个分式的分母分解因式：

$$x^2-9x+20=(x-5)(x-4);$$

$$x^2-11x+30=(x-5)(x-6).$$

所以最简公分母是 $(x-5)(x-4)(x-6)$.

通分得

$$\frac{4}{x^2-9x+20}=\frac{4}{(x-5)(x-4)}=\frac{4(x-6)}{(x-5)(x-4)(x-6)}$$
$$=\frac{4x-24}{(x-5)(x-4)(x-6)};$$
$$\frac{2}{x^2-11x+30}=\frac{2}{(x-5)(x-6)}=\frac{2(x-4)}{(x-5)(x-4)(x-6)}$$
$$=\frac{2x-8}{(x-5)(x-4)(x-6)}.$$

例 5. 通分: $\frac{3+2x}{2-x}$, $\frac{2-3x}{2+x}$, $\frac{16x-x^2}{x^2-4}$.

【解】 $\because$ $2-x=-(x-2)$,
$2+x=x+2$,
$x^2-4=(x+2)(x-2)$;

它们的最低公倍式是: $(x+2)(x-2)$.

$$\therefore\quad \frac{3+2x}{2-x}=-\frac{2x+3}{x-2}=-\frac{(2x+3)(x+2)}{(x+2)(x-2)},$$
$$\frac{2-3x}{2+x}=-\frac{3x-2}{x+2}=-\frac{(3x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)},$$
$$\frac{16x-x^2}{x^2-4}=-\frac{x^2-16x}{(x+2)(x-2)}.$$

说明　这里分子乘出来较长，不乘出来也可以. 在求最简公分母时，负号不必引入.

例 6. 通分:

$$\frac{a+b}{(b-c)(c-a)},\quad \frac{b+c}{(b-a)(a-c)},\quad \frac{a+c}{(a-b)(b-c)}.$$

【解】 分母的最低公倍式是$(a-b)(b-c)(c-a)$.

$$\therefore\quad \frac{a+b}{(b-c)(c-a)}=\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

$$\frac{b+c}{(b-a)(a-c)}=\frac{b+c}{(a-b)(c-a)}$$
$$=\frac{(b+c)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$
$$\frac{a+c}{(a-b)(b-c)}=\frac{(a+c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

说明 这里分母的三个因式，可以依照 a, b, c 的轮转次序来排，所以得 $a-b, b-c, c-a$；也可以按照 a, b, c 先后次序排，就得 $a-b, b-c, a-c$. 我们可以按照任一种次序排，但自己心中必须有一标准，前后一致.

例 7. 通分：$\dfrac{x}{x^2y-y^3}, \dfrac{2}{xy+x^2}, \dfrac{3}{x^2-y^2}$.

【解】 先将分母分解因式：

$$\because \quad x^2y-y^3=y(x^2-y^2)=y(x+y)(x-y),$$
$$xy+x^2=x(y+x)=x(x+y),$$
$$x^2-y^2=(x+y)(x-y);$$

它们的最低公倍式是：$xy(x+y)(x-y)$.

$$\therefore \quad \frac{x}{x^2y-y^3}=\frac{x}{y(x+y)(x-y)}=\frac{x^2}{xy(x+y)(x-y)},$$
$$\frac{2}{xy+x^2}=\frac{2}{x(x+y)}=\frac{2y(x-y)}{xy(x+y)(x-y)},$$
$$\frac{3}{x^2-y^2}=\frac{3}{(x+y)(x-y)}=\frac{3xy}{xy(x+y)(x-y)}.$$

习 题 5·5

通分：

1. $\dfrac{3}{8x^2y}, \dfrac{4}{-12x^3yz^2}, \dfrac{-3}{20xy^3z}$.

2. $\dfrac{3xy}{-10a^2b^3c}, \dfrac{7cx}{-15a^3by}, \dfrac{4a^2c}{-25b^2x^2}$.

3. $\frac{b}{a^2-b^2}$, $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b-a}$.

4. $\frac{3}{x^2-ax}$, $\frac{5}{x^3-a^2x}$, $\frac{7}{a^3-ax^2}$.

5. $\frac{x-y}{x^3+y^3}$, $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

6. $\frac{a}{b(c-d)}$, $\frac{c}{a(d-c)}$, $\frac{1+a}{ab}$.

7. $\frac{x+2}{x^2+x-6}$, $\frac{x-2}{x^2+5x+6}$.

8. $\frac{6}{5x-5}$, $\frac{2}{3x+3}$, $\frac{4}{x^2-1}$.

9. $\frac{1}{(a-b)(b-c)}$, $\frac{1}{(b-a)(c-a)}$.

10. $\frac{1}{ab(a-b)(c-a)}$, $\frac{1}{ac(a-c)(b-c)}$.

11. $\frac{1}{x^2-y^2}$, $\frac{1}{x^3-y^3}$, $\frac{1}{x^4-y^4}$.

12. $\frac{x+2}{x^2-x-12}$, $\frac{x+3}{x^2-6x+8}$, $\frac{x+4}{x^2+x-6}$.

§5·6　分式的加减法

分式的加减法，可以依照分数加减法的同样法则来进行.

1. 分母相同的分式的加减法　这和分母相同的分数加减法一样，我们有下面的**分母相同的分式的加减法则**：分母相同的分式相加减，分母不变，分子相加减. 即

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}+\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}};\quad \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}-\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}.$$

例 1. 计算：$\frac{5a+6b}{3a^2bc}+\frac{3b-4a}{3a^2bc}-\frac{a+3b}{3a^2bc}$.

【解】 三个加式的分母相同，只要对分子进行加减：

$$\frac{5a+6b}{3a^2bc}+\frac{3b-4a}{3a^2bc}-\frac{a+3b}{3a^2bc}$$

$$=\frac{(5a+6b)+(3b-4a)-(a+3b)}{3a^2bc}$$

$$=\frac{5a+6b+3b-4a-a-3b}{3a^2bc}$$

$$=\frac{6b}{3a^2bc}=\frac{2}{a^2c}.$$

注意 1．原来各分式的分子如果是多项式，合并成一个分式后原来的分子要添上括号；如果做的是减法，去括号时要改变括号内各项的符号．这种地方很容易做错，切须注意．

2．加减法合并同类项之后，如果分子分母有公因式，要进行约分，化成最简分式．

例 2．计算：$\frac{12x-7}{x^2-5x-6}-\frac{3x+7}{x^2-5x-6}-\frac{8x-15}{x^2-5x-6}$.

【解】 $\frac{12x-7}{x^2-5x-6}-\frac{3x+7}{x^2-5x-6}-\frac{8x-15}{x^2-5x-6}$

$$=\frac{(12x-7)-(3x+7)-(8x-15)}{x^2-5x-6}$$

$$=\frac{12x-7-3x-7-8x+15}{x^2-5x-6}$$

$$=\frac{x+1}{x^2-5x-6}$$

$$=\frac{x+1}{(x-6)(x+1)}$$

$$=\frac{1}{x-6}.$$

例 3．计算：$\frac{a^2-2a+1}{a^2+a+1}-\frac{a^2+3a-3}{a^2+a+1}+\frac{5a-4}{a^2+a+1}$.

【解】 $$\frac{a^2-2a+1}{a^2+a+1}-\frac{a^2+3a-3}{a^2+a+1}+\frac{5a-4}{a^2+a+1}$$
$$=\frac{(a^2-2a+1)-(a^2+3a-3)+(5a-4)}{a^2+a+1}$$
$$=\frac{a^2-2a+1-a^2-3a+3+5a-4}{a^2+a+1}$$
$$=\frac{0}{a^2+a+1}=0.$$

说明 分子合并同类项，各项恰好正负相消，得0，因为0除以任何不等于0的数是0，所以结果等于0.

例4. 计算：$\frac{3a^2-5a}{a^2+1}-\frac{2a^2-5a+1}{a^2+1}+\frac{2(a^2+2)}{a^2+1}$.

【解】 $$\frac{3a^2-5a}{a^2+1}-\frac{2a^2-5a+1}{a^2+1}+\frac{2a^2+4}{a^2+1}$$
$$=\frac{(3a^2-5a)-(2a^2-5a+1)+(2a^2+4)}{a^2+1}$$
$$=\frac{3a^2-5a-2a^2+5a-1+2a^2+4}{a^2+1}$$
$$=\frac{3a^2+3}{a^2+1}=\frac{3(a^2+1)}{a^2+1}=3.$$

说明 约分后分母变为1，分子是3，结果等于3.

习　题　5·6(1)

计算：

1. $\frac{2a-3b}{3a^3b^5c^2}-\frac{3b-5c}{3a^3b^5c^2}+\frac{4a^2-5c}{3a^3b^5c^2}$.
2. $\frac{x^2-ax+a^2}{12a^3x^4}-\frac{2x^2-3ax+3a^2}{12a^3x^4}-\frac{5x^2+2ax-2a^2}{12a^3x^4}$.
3. $\frac{x^2+4}{x+3}+\frac{2x-7}{x+3}-\frac{x^2+x-6}{x+3}$.
4. $\frac{3x-5}{x^2-3x-4}+\frac{x^2-7x+2}{x^2-3x-4}-\frac{2(x+2)}{x^2-3x-4}$.

5. $\frac{5x-7}{x^2+3x}-\frac{2x+5}{x^2+3x}-\frac{2x-15}{x^2+3x}$.

6. $\frac{x^3-4x}{x^2-3x+2}-\frac{3x^2-6x}{x^2-3x+2}$.

7. $\frac{3a^2+3a-1}{a^2-5a-3}-\frac{a^2+2a+7}{a^2-5a-3}-\frac{a^2+6a-5}{a^2-5a-3}$.

8. $\frac{3x^2-5ax+a^2}{x^2+3ax+2a^2}-\frac{x^2+ax+3a^2}{x^2+3ax+2a^2}-\frac{2x^2-6ax-2a^2}{x^2+3ax+2a^2}$.

9. $\frac{x^2+3x-5}{x^2-3x-18}-\frac{2x^2-4x+7}{x^2-3x-18}-\frac{7x-12-x^2}{x^2-3x-18}$.

10. $\frac{x^2-a^2}{x^2-9a^2}-\frac{(x-2a)^2}{x^2-9a^2}+\frac{5a^2-4ax}{x^2-9a^2}$.

2．分母不相同的分式的加减法　和异分母分数的加减法一样，做分母不相同的分式的加减法可以用下面的**分母不相同的分式的加减法则**：分母不相同的分式相加减，先通分，再照分母相同的分式加减法进行．

例 5．计算：$\frac{4a^2-5ab}{2b^2}-\frac{2b^2-5ab}{3a^2}+\frac{a^2+b^2}{5ab}$.

【解】 各分式的最简公分母是 $30a^2b^2$,

$$\frac{4a^2-5ab}{2b^2}-\frac{2b^2-5ab}{3a^2}+\frac{a^2+b^2}{5ab}$$

$$=\frac{(4a^2-5ab)15a^2-(2b^2-5ab)10b^2+(a^2+b^2)6ab}{30a^2b^2}$$

$$=\frac{60a^4-75a^3b-20b^4+50ab^3+6a^3b+6ab^3}{30a^2b^2}$$

$$=\frac{60a^4-69a^3b+56ab^3-20b^4}{30a^2b^2}.$$

例 6．计算：$\frac{a^2-2ac+c^2}{a^2c^2}-\frac{b^2-2bc+c^2}{b^2c^2}$.

【解】

$$\frac{a^2-2ac+c^2}{a^2c^2}-\frac{b^2-2bc+c^2}{b^2c^2}$$

$$=\frac{(a^2-2ac+c^2)b^2-(b^2-2bc+c^2)a^2}{a^2b^2c^2}$$

$$=\frac{a^2b^2-2ab^2c+b^2c^2-a^2b^2+2a^2bc-a^2c^2}{a^2b^2c^2}$$

$$=\frac{2a^2bc-a^2c^2-2ab^2c+b^2c^2}{a^2b^2c^2}$$

$$=\frac{c(2a^2b-a^2c-2ab^2+b^2c)}{a^2b^2c^2}=\frac{2a^2b-a^2c-2ab^2+b^2c}{a^2b^2c}.$$

例 7. 计算: $\frac{1}{x-y}-\frac{3xy}{x^3-y^3}$.

【解】 $\frac{1}{x-y}-\frac{3xy}{x^3-y^3}=\frac{1}{x-y}-\frac{3xy}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$

$$=\frac{x^2+xy+y^2-3xy}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{x^2-2xy+y^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$$

$$=\frac{(x-y)^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{x-y}{x^2+xy+y^2}.$$

例 8. 计算: $\frac{x+2}{x^2-9x+20}-\frac{x-1}{x^2-11x+30}$.

【解】

$$\frac{x+2}{x^2-9x+20}-\frac{x-1}{x^2-11x+30}$$

$$=\frac{x+2}{(x-5)(x-4)}-\frac{x-1}{(x-5)(x-6)}$$

$$=\frac{(x+2)(x-6)-(x-1)(x-4)}{(x-5)(x-4)(x-6)}$$

$$=\frac{(x^2-4x-12)-(x^2-5x+4)}{(x-5)(x-4)(x-6)}$$

$$=\frac{x^2-4x-12-x^2+5x-4}{(x-5)(x-4)(x-6)}=\frac{x-16}{(x-5)(x-4)(x-6)}.$$

习 题 5·6(2)

计算:

1. $\frac{5}{3x}-\frac{2x-7}{12x^2}$.

2. $\frac{a+b}{3a^2b}-\frac{a-b}{5ab^2}$.

3. $\frac{3xy-4}{x^2y^2}-\frac{5y^2+7}{xy^3}-\frac{6x^2-11}{x^3y}$.

4. $\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-3}$.

5. $\frac{x}{1+x}+\frac{x}{1-x}$.

6. $\frac{1+x}{1+x+x^2}-\frac{1-x}{1-x+x^2}$.

7. $\frac{a}{a-b}-\frac{a^3+2ab^2}{a^3-b^3}$.

8. $\frac{1}{a-b}-\frac{a+b}{(a-b)^2}-\frac{a+2b}{a^2-b^2}$.

9. $\frac{x+1}{x^2-5x+6}-\frac{x-1}{x^2-7x+12}$.

10. $\frac{3}{a^2+7a+12}-\frac{2}{a^2+2a-8}$.

11. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}-\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}$.

12. $\frac{x+y}{y}-\frac{2x}{x+y}+\frac{x^3}{y(x^2-y^2)}$.

例 9. 计算: $\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(b-a)(a-c)}$.

【解】 $\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(b-a)(a-c)}$

$$=\frac{1}{(a-b)(b-c)}-\frac{1}{(a-b)(a-c)}$$

$$=\frac{(a-c)-(b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{a-c-b+c}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{a-b}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{1}{(b-c)(a-c)}.$$

例 10. 计算:

$$\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ac}{(b+c)(a+b)}+\frac{c^2-ab}{(a+c)(b+c)}.$$

【解】

$$\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ac}{(b+c)(a+b)}+\frac{c^2-ab}{(a+c)(b+c)}$$

$$=\frac{(a^2-bc)(b+c)+(b^2-ac)(a+c)+(c^2-ab)(a+b)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

$$=\frac{a^2b+a^2c-b^2c-bc^2+ab^2+b^2c-a^2c-ac^2+ac^2+bc^2-a^2b-ab^2}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

$$=\frac{0}{(a+b)(a+c)(b+c)}=0.$$

习 题 5·6(3)

计算:

1. $\frac{z}{x^2-xz}+\frac{x}{z^2-xz}$.

2. $\frac{x^3+x^2y}{x^2y-y^3}-\frac{x(x-y)}{xy+x^2}-\frac{2xy}{x^2-y^2}$.

3. $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+2b}+\frac{a^2+b^2+ab}{(b-a)(2b+a)}$.

4. $\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(b-a)(a-c)}-\frac{1}{(c-b)(c-a)}$.

5. $\frac{1}{a^2-(b-c)^2}-\frac{1}{b^2-(c-a)^2}-\frac{1}{c^2-(a-b)^2}$.

6. $\frac{a-c}{(a+b)^2-c^2}-\frac{a-b}{(a+c)^2-b^2}$.

7. $\frac{3+2x}{2-x}-\frac{2-3x}{2+x}+\frac{16x-x^2}{x^2-4}$.

8. $\frac{1}{(2-a)(3-a)}-\frac{2}{(a-1)(a-3)}+\frac{1}{(a-1)(a-2)}$.

9. $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(b-a)(a-c)}+\frac{a+c}{(a-b)(b-c)}$.

10. $\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2+ac}{(b+c)(b-a)}+\frac{c^2+ab}{(c-a)(c+b)}$.

例 11. 计算：$x+8-\dfrac{x^2+4}{x-2}$.

分析 这是一个整式和一个分式的代数和，把整式 $x+8$ 当做 $\dfrac{x+8}{1}$ 再通分.

【解】
$$x+8-\frac{x^2+4}{x-2}=\frac{(x+8)(x-2)-(x^2+4)}{x-2}$$
$$=\frac{x^2+6x-16-x^2-4}{x-2}$$
$$=\frac{6x-20}{x-2}.$$

例 12. 计算：$a+\dfrac{1}{a-1}$.

【解】 $a+\dfrac{1}{a-1}=\dfrac{a(a-1)+1}{a-1}=\dfrac{a^2-a+1}{a-1}$.

注意 我们在整式一章中，学习过有余式的除法，如$(a^2-a+1)\div(a-1)$时得部分的商 a，剩下余式 1. 如果要表达它们之间的关系，我们可以写做 $\dfrac{a^2-a+1}{a-1}=a+\dfrac{1}{a-1}$，和算术里的 $\dfrac{36}{5}=7\dfrac{1}{5}$ 相类似.

这里应该注意，在算术里 $7\dfrac{1}{5}$ 就是 $7+\dfrac{1}{5}$，普通写做带分数$7\dfrac{1}{5}$，加号可以省去. 但在代数里，不能把 $a+\dfrac{1}{a-1}$ 写做 $a\dfrac{1}{a-1}$，如果把加号省去了，就和 $a\times\dfrac{1}{a-1}$ 要混淆了.

习 题 5·6(4)

计算(1～8)：

1. $\dfrac{1}{a-1}+1$.

2. $a+b-\dfrac{a^2}{a-b}$.

3. $x+3+\dfrac{6-x-2x^2}{x-2}$.

4. $a+b+\dfrac{a^3-b^3}{a^2-ab+b^2}$.

5. $(a-b)^2-\dfrac{a^3+b^3}{a-b}$.

6. $a^2-b^2+\dfrac{a^3-b^3}{a+b}$.

7. $\dfrac{y^3}{x-y}+x^2+xy+y^2$.　　8. $\dfrac{x+5}{x^2+3x+2}+3$.

把下面的分式化成为一个整式与一个分式的代数和(分式的分子的次数要低于分母的次数):

9. $\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.　　10. $\dfrac{a^2}{a-1}$.

11. $(2x^2+3x-4)\div(x+1)$.　　12. $(x^3-1)\div(x^2+x-2)$.

§5·7 分式的乘法

分式的乘法,可以依照分数乘法的同样法则进行.

分式的乘法法则: 分式相乘,分子分母分别相乘. 即

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

例1. 计算:

(1) $\dfrac{3a^2b}{5xy^2}\times\dfrac{2ab^4c}{7xy^2z^3}$;

(2) $\dfrac{2a^3b^2}{5cd^4}\times\dfrac{3a^4c^2d}{4b^2}$;

(3) $\dfrac{-7a^2b}{5cx^2}\times\left(-\dfrac{20cx^2}{21a^2y^2}\right)\times\left(-\dfrac{6ay^5}{5b^2x^3}\right)$.

【解】 (1) 分子分母分别相乘,得

$$\frac{3a^2b}{5xy^2}\times\frac{2ab^4c}{7xy^2z^3}=\frac{3a^2b\cdot 2ab^4c}{5xy^2\cdot 7xy^2z^3}=\frac{6a^3b^5c}{35x^2y^4z^3}.$$

(2) 分子分母分别相乘后,因分子分母有公因式,约成最简分式,得

$$\frac{2a^3b^2}{5cd^4}\times\frac{3a^4c^2d}{4b^2}=\frac{6a^7b^2c^2d}{20b^2cd^4}=\frac{3a^7c}{10d^3}.$$

(3) 这里有三个负号,乘积有负号,放在分式前面,得

$$-\frac{7a^2b}{5cx^2}\times\left(-\frac{20cx^2}{21a^2y^2}\right)\times\left(-\frac{6ay^5}{5b^2x^3}\right)$$

$$=-\frac{7a^2b\cdot 20cx^2\cdot 6ay^5}{5cx^2\cdot 21a^2y^2\cdot 5b^2x^3}$$

$$=-\frac{7\cdot 20\cdot 6a^3bcx^2y^5}{5\cdot 5\cdot 21a^2b^2cx^5y^2}$$

$$=-\frac{8ay^3}{5bx^3}.$$

例 2. 计算:

(1) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$;

(2) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+8x+16}\cdot\frac{x^2+7x+12}{x^2-8x+15}\cdot\frac{x^2-x-20}{x^2+x-6}$;

(3) $(x^2-4)\cdot\frac{x^3+8}{x^3-8}\cdot\frac{x^2+2x+4}{x^2+4x+4}$.

【解】

(1) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}=\frac{(a^2-b^2)(a^3+b^3)}{(a^2+b^2)(a^3-b^3)}$

$$=\frac{(a+b)(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a^2+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

$$=\frac{(a+b)^2(a^2-ab+b^2)}{(a^2+b^2)(a^2+ab+b^2)}.$$

注意 计算的结果,必须约成最简分式.

(2) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+8x+16}\cdot\frac{x^2+7x+12}{x^2-8x+15}\cdot\frac{x^2-x-20}{x^2+x-6}$

$$=\frac{(x-3)(x-2)(x+3)(x+4)(x-5)(x+4)}{(x+4)^2(x-3)(x-5)(x+3)(x-2)}$$

$$=\frac{1}{1}=1.$$

(3) x^2-4 就是 $\frac{x^2-4}{1}$,

$$\therefore\quad (x^2-4)\cdot\frac{x^3+8}{x^3-8}\cdot\frac{x^2+2x+4}{x^2+4x+4}$$

$$=\frac{(x+2)(x-2)(x+2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)(x+2)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x+4}{1}=x^2-2x+4.$$

例 3. 计算:

(1) $\dfrac{(b^2-a^2)^2}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{a^2+b^2}{(a-b)^2}$;

(2) $\dfrac{(b+a)^3}{(a^3-b^3)^2}\cdot\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}\cdot(b-a)^3$.

【解】 (1) $\because\quad (b^2-a^2)^2=[-(a^2-b^2)]^2=(a^2-b^2)^2$,

$$\therefore\quad \frac{(b^2-a^2)^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}=\frac{(a^2-b^2)^2(a^2+b^2)}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$=\frac{[(a+b)(a-b)]^2(a^2+b^2)}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$=\frac{(a+b)^2(a-b)^2(a^2+b^2)}{(a+b)^2(a-b)^2}=a^2+b^2;$$

(2) $\because\quad (b-a)^3=[-(a-b)]^3=-(a-b)^3$,

$$\therefore\quad \frac{(b+a)^3}{(a^3-b^3)^2}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}\cdot(b-a)^3$$

$$=\frac{(a+b)^3}{[(a-b)(a^2+ab+b^2)]^2}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{-(a-b)^3}{1}$$

$$=-\frac{(a+b)^3(a^2+ab+b^2)(a-b)^3}{(a-b)^2(a^2+ab+b^2)^2(a+b)^2}$$

$$=-\frac{(a+b)(a-b)}{a^2+ab+b^2}.$$

注 遇到这类题目，先把分子分母中的字母，按照同样的顺序排列，相乘后就容易发现应该怎样把它约简.

习 题 5·7(1)

计算:

1. $\dfrac{3x^2y}{4z^2}\cdot\dfrac{5z}{6xy}\cdot\left(-\dfrac{12x^2}{y^2}\right)$.

2. $\dfrac{3ab^2}{2cx^2}\cdot\left(-\dfrac{5by^2}{4ax^2}\right)\left(-\dfrac{3cx^2}{2by^2}\right)$.

3. $\dfrac{a-b}{a^2+ab}\cdot\dfrac{a^4+a^2b^2}{a^2-ab}$.

4. $\dfrac{x-5}{x+3}\cdot\dfrac{x^2-9}{x^2-25}$.

5. $\dfrac{x^3+y^3}{(x-y)^2}\cdot\dfrac{x^3-y^3}{(x+y)^2}$.

6. $\dfrac{a^2b^2+3ab}{4a^2-1}\cdot\dfrac{2a+1}{ab+3}$.

7. $\dfrac{16x^2-9a^2}{x^2-4}\cdot\dfrac{x-2}{4x-3a}$.

8. $\dfrac{a(x-b)}{bx+ab}\cdot\dfrac{b^2x+ab^2}{a^2x-a^3}\cdot\dfrac{x^2-a^2}{x^2-b^2}$.

9. $\dfrac{x^2-x-20}{x^2+2x-8}\cdot\dfrac{x^2-x-2}{x^2-25}\cdot\dfrac{x^2+5x}{x+1}$.

10. $\dfrac{x^2-8x-9}{x^2+4x-5}\cdot\dfrac{x^2-1}{x^2-17x+72}\cdot\dfrac{x^2-9x+8}{x^2-25}$.

11. $\dfrac{x^4-8x}{x^2-4x-5}\cdot\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+4}\cdot\dfrac{x-5}{x^3-x^2-2x}$.

12. $\dfrac{(a-b)^2-c^2}{(a+b)^2-c^2}\cdot\dfrac{a^2-(b+c)^2}{a^2-(b-c)^2}$.

13. $\dfrac{x^2-(y-z)^2}{y^2-(z-x)^2}\cdot\dfrac{z^2-(x-y)^2}{(y+z)^2-x^2}$.

14. $\dfrac{x^2-2xy+y^2-z^2}{x^2+2xy+y^2-z^2}\cdot\dfrac{x+y-z}{x-y+z}$.

15. $\dfrac{x^3+y^3+3xy(x+y)}{x^3-y^3-3xy(x-y)}\cdot\dfrac{x(x-2y)+y^2}{x(x+2y)+y^2}$.

16. $(x^2+2xy+y^2)\cdot\dfrac{x-y}{x^3+y^3}\cdot\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}$.

17. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}\cdot\dfrac{x^2+5x-6}{x^2+x-6}\cdot\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+6x}\cdot\dfrac{x}{x-1}$.

18. $\dfrac{a+2b}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}\cdot\dfrac{a^3+a^2b-ab^2-b^3}{a^2-4b^2}\cdot\dfrac{a-2b}{a^4-b^4}$.

19. $\dfrac{(x+y)^2}{y^2-xy}\cdot\left[-\dfrac{(x-y)^2}{y^2+xy}\right]$.

20. $\dfrac{x^2-1}{x^2}\cdot\dfrac{x}{1-x}$.

21. $\dfrac{a^2-4a+3}{16-a^2}\cdot\dfrac{a^2-3a-4}{a^2-1}$.

22. $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+3x-10}\cdot\dfrac{9x-x^2-14}{x^2-7x+12}$.

23. $\dfrac{(a-b)^3}{(a+b)^3}\cdot\dfrac{(b+a)^3}{(b-a)^3}$.

24. $\dfrac{(a^2-b^2)^2}{b^6-a^6}\cdot\dfrac{(b^3+a^3)^2}{(b^2-a^2)^3}$.

例 4. 计算:

(1) $\left(a+\frac{b^2}{a}\right)\left(1-\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\right)$;

(2) $\frac{2}{a+2b}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{a^4-b^4}{(b-a)^2}-\frac{a^2-b^2}{(a+2b)^2}\cdot\frac{4b^2-a^2}{b-a}$.

【解】

(1) $$\left(a+\frac{b^2}{a}\right)\left(1-\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\right)$$
$$=\frac{a^2+b^2}{a}\cdot\frac{b^2+a^2-(b^2-a^2)}{b^2+a^2}$$
$$=\frac{a^2+b^2}{a}\cdot\frac{2a^2}{a^2+b^2}=2a;$$

(2) $$\frac{2}{a+2b}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{a^4-b^4}{(b-a)^2}-\frac{a^2-b^2}{(a+2b)^2}\cdot\frac{4b^2-a^2}{b-a}$$
$$=\frac{2(a+b)(a-b)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}{(a+2b)(a^2+b^2)(a-b)^2}$$
$$-\frac{(a+b)(a-b)(2b+a)(2b-a)}{(a+2b)^2(b-a)}$$
$$=\frac{2(a+b)^2}{a+2b}-\frac{(a+b)(a-b)(a+2b)(a-2b)}{(a+2b)^2(a-b)}$$
$$=\frac{2(a+b)^2}{a+2b}-\frac{(a+b)(a-2b)}{a+2b}$$
$$=\frac{2(a+b)^2-(a+b)(a-2b)}{a+2b}$$
$$=\frac{2a^2+4ab+2b^2-(a^2-ab-2b^2)}{a+2b}$$
$$=\frac{2a^2+4ab+2b^2-a^2+ab+2b^2}{a+2b}$$
$$=\frac{a^2+5ab+4b^2}{a+2b}.$$

说明　这是加减法与乘法的混合运算，仍按照以前讲的运算次序。

习 题 5·7(2)

计算:

1. $\left(1-\frac{2b}{a}+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(1+\frac{a+b}{a-b}\right)$. 2. $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)$.

3. $(x^2-1)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-1\right)$. 4. $\left(1+\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\left[1-\frac{2ab}{(a+b)^2}\right]$.

5. $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}\cdot\frac{x^2-9}{x^2+5x+6}-\frac{x^2+9x+20}{x^2-16}\cdot\frac{x^2-9x+20}{x^2-25}$.

6. $\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{a^3-2x^3}{a^3-x^3}\right)$.

7. $\left(\frac{5a}{a+x}+\frac{5x}{a-x}+\frac{10ax}{a^2-x^2}\right)\left(\frac{a}{a+x}+\frac{x}{a-x}+\frac{2ax}{x^2-a^2}\right)$.

8. $\left(\frac{2a}{a+1}-\frac{2}{1-a}+\frac{4a}{a^2-1}\right)\left(\frac{2a}{1+a}-\frac{2}{1-a}-\frac{4a}{a^2-1}\right)$.

9. $\left(1+\frac{y}{x-y}\right)\left(y-\frac{y^2}{x+y}\right)-\frac{x^4y}{x^4-y^4}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2}$.

10. $\left[\frac{a^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2b}{a^2+b^2}\left(\frac{a}{ab+b^2}+\frac{b}{a^2+ab}\right)\right]\times\frac{a-b}{b}$.

§5·8 分式的乘方

根据乘方的意义,并且应用分式的乘法法则,我们很容易做分式的乘方.

例如:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}=\frac{b^2}{a^2},$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3=\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}=\frac{b^3}{a^3}.$$

一般地有

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n=\underbrace{\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdots\frac{b}{a}}_{n\text{个}}=\frac{\overbrace{b\cdot b\cdots b}^{n\text{个}}}{\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n\text{个}}}=\frac{b^n}{a^n}.$$

分式乘方法则：分式乘方，分子分母各自乘方．即

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}\quad(n\text{是任意自然数}).$$

例 1．计算：$\left(\dfrac{4b^3x}{3a^2}\right)^3$.

【解】 $\left(\dfrac{4b^3x}{3a^2}\right)^3=\dfrac{(4b^3x)^3}{(3a^2)^3}=\dfrac{64b^9x^3}{27a^6}$.

例 2．计算：$\left(-\dfrac{3x^5y^6}{2a^3b^4}\right)^5$.

【解】 $\left(-\dfrac{3x^5y^6}{2a^3b^4}\right)^5=(-1)^5\dfrac{(3x^5y^6)^5}{(2a^3b^4)^5}=-\dfrac{243x^{25}y^{30}}{32a^{15}b^{20}}$.

例 3．计算：$\left[-\dfrac{x^2y^3}{3(x+y)}\right]^4\cdot\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2y^2}\right)^3$.

【解】
$$\left[-\frac{x^2y^3}{3(x+y)}\right]^4\cdot\left(\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}\right)^3$$
$$=+\frac{x^8y^{12}}{81(x+y)^4}\cdot\frac{(x+y)^3(x-y)^3}{x^6y^6}$$
$$=\frac{x^2y^6(x-y)^3}{81(x+y)}.$$

注意 分式乘方时，如果分子分母是积的形式，应按照积的乘方法则进行．

习 题 5·8

计算：

1．$\left(\dfrac{3y^2}{2x^3}\right)^5$.　　2．$\left(-\dfrac{3b^3y^4}{5a^2x^2}\right)^3$.

3．$\left(-\dfrac{5a^3y^4}{4bx^5}\right)^4$.　　4．$\left[\dfrac{5(x+y)}{2(x-y)}\right]^3$.

5．$\left(\dfrac{x^2y^2}{x^2-y^2}\right)^3\cdot\left(\dfrac{y^2-x^2}{x^3y^3}\right)^2$.　　6．$\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^3\cdot\left[\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^3}\right]^3$.

7. $\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}\right)^3\cdot\left(\frac{b^2-a^2}{a+b}\right)^3$. 8. $\left(\frac{5xy}{x^2+xy}\right)^2\cdot\left(-\frac{xy+y^2}{2x^2y^2}\right)^3$.

9. $\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)^2\cdot\left(1+\frac{b}{a}\right)^2$. 10. $-\left(1-\frac{y}{x}\right)^6\cdot\left(\frac{x}{y-x}\right)^5$.

§5·9 分式的除法

在分数的除法里，我们知道，除以一个分数，等于乘以这个分数的倒数，例如 $\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}$. 分式的除法，也依照分数除法的同样法则来进行.

分式的除法法则：一个代数式除以一个分式，等于乘以把这个分式的分子分母对调后所成的分式. 即

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}.$$

例1. 计算：

(1) $\frac{3a^2b^3}{c^4d}\div\frac{5a^2b}{c^3d^2x}$; (2) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\div\frac{x^3-y^3}{x^6+y^6}$.

【解】 (1) $\frac{3a^2b^3}{c^4d}\div\frac{5a^2b}{c^3d^2x}=\frac{3a^2b^3}{c^4d}\times\frac{c^3d^2x}{5a^2b}$

$$=\frac{3a^2b^3c^3d^2x}{5a^2bc^4d}=\frac{3b^2dx}{5c};$$

(2) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\div\frac{x^3-y^3}{x^6+y^6}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\times\frac{x^6+y^6}{x^3-y^3}$

$$=\frac{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)}$$

$$=\frac{(x+y)(x^4-x^2y^2+y^4)}{x^2+xy+y^2}.$$

例2. 计算：

(1) $\frac{x^2-4x}{x+3}\div(4-x)$; (2) $(3x+6)\div\frac{x^2+x-2}{x}$.

【解】

(1) $$\frac{x^2-4x}{x+3}\div(4-x)=\frac{x^2-4x}{x+3}\times\frac{1}{4-x}$$

$$=\frac{x(x-4)}{(x+3)(4-x)}=-\frac{x}{x+3};$$

(2) $$(3x+6)\div\frac{x^2+x-2}{x}=\frac{3(x+2)}{1}\times\frac{x}{x^2+x-2}$$

$$=\frac{3(x+2)x}{(x+2)(x-1)}=\frac{3x}{x-1}.$$

例 3. 计算:

(1) $$\frac{x^2-9}{x^2-1}\div\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x-6}\div\frac{x^2+5x+6}{x^2-5x-6};$$

(2) $$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\div\frac{a^3-b^3}{a^4+b^4}\times\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

【解】

(1) $$\frac{x^2-9}{x^2-1}\div\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x-6}\div\frac{x^2+5x+6}{x^2-5x-6}$$

$$=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-1)}\times\frac{x^2+5x-6}{x^2-5x+6}\times\frac{x^2-5x-6}{x^2+5x+6}$$

$$=\frac{(x+3)(x-3)(x+6)(x-1)(x-6)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{(x+6)(x-6)}{(x-2)(x+2)};$$

(2) $$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\div\frac{a^3-b^3}{a^4+b^4}\times\frac{a^2+b^2}{a+b}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\times\frac{a^4+b^4}{a^3-b^3}\times\frac{a^2+b^2}{a+b}$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)(a^4+b^4)(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)}$$

$$=\frac{a^4+b^4}{a^2+ab+b^2}.$$

习 题 5·9(1)

计算:

1. $\dfrac{14x^2}{27y^2}\div\dfrac{7x}{9y}$.

2. $\dfrac{a^2-3a-10}{a^3-1}\div\dfrac{a^2-4}{a^2+a+1}$.

3. $(m-1)\div\dfrac{m-1}{m+1}$.

4. $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\div(x+y)$.

5. $\dfrac{(x+y)^2}{xy-y^2}\div\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy+y^2}$.

6. $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2+2x-3}\div\dfrac{x^2-16}{x^2+6x+9}$.

7. $\dfrac{ax}{(a-x)^2}\div\dfrac{ab}{a^2-x^2}\div\dfrac{ax}{b(a-x)}$.

8. $16x^2y^3\div\left(-\dfrac{20x^5y^4}{3a^2b}\right)\div\dfrac{ab}{x+y}$.

9. $\dfrac{a^2+5a+4}{a^2+a-2}\div5(a+1)^2\div\dfrac{1}{a^2-2a+1}$.

10. $\dfrac{(a^2-x^2)^3}{a^2+x^2}\div\dfrac{(a^2+2ax+x^2)^2}{a^4-x^4}\times\dfrac{1}{(a^2-2ax+x^2)^2}$.

例 4. 计算:

(1) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\div\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$;

(2) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\div\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)$.

【解】

(1) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\div\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+1}{x}\div\dfrac{x^2-1}{x}$

$$=\frac{x^2+1}{x}\times\frac{x}{x^2-1}=\frac{x^2+1}{x^2-1};$$

(2) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\div\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{b+a}{ab}\div\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}$

$$=\frac{b+a}{ab}\times\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}=\frac{a^2b^2(b+a)}{ab(b+a)(b-a)}$$

$$=\frac{ab}{b-a}.$$

例 5. 计算:

(1) $\frac{a-b}{a+b}\div\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a+b}{ab}\div\frac{a^2+b^2}{a^2b+ab^2}$;

(2) $\frac{x}{x-1}\div\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x^3-1}\div\frac{1}{x^2+x+1}$.

【解】

(1) $\frac{a-b}{a+b}\div\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a+b}{ab}\div\frac{a^2+b^2}{a^2b+ab^2}$

$$=\frac{a-b}{a+b}\times\frac{(a+b)(a-b)}{a^2+b^2}-\frac{a+b}{ab}\times\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}-\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2-(a^2+2ab+b^2)}{a^2+b^2}=\frac{-4ab}{a^2+b^2};$$

(2) $\frac{x}{x-1}\div\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x^3-1}\div\frac{1}{x^2+x+1}$

$$=\frac{x}{x-1}\times\frac{x+1}{x}-\frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\times\frac{x^2+x+1}{1}=\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+1}{x-1}=0.$$

例 6. 计算:

$$\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right)\div\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right).$$

【解】

$$\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right)\div\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)$$

$$=\left[\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{(2a+b)^2}\right]\div\left[\frac{2a}{(2a+b)(2a-b)}-\frac{1}{2a-b}\right]$$

$$=\frac{2a(2a+b)-4a^2}{(2a+b)^2}\div\frac{2a-(2a+b)}{(2a+b)(2a-b)}$$

$$=\frac{4a^2+2ab-4a^2}{(2a+b)^2}\div\frac{2a-2a-b}{(2a+b)(2a-b)}$$

$$=\frac{2ab}{(2a+b)^2}\div\frac{-b}{(2a+b)(2a-b)}$$

$$=\frac{2ab}{(2a+b)^2}\times\frac{(2a+b)(2a-b)}{-b}$$

$$=\frac{2ab(2a+b)(2a-b)}{-b(2a+b)^2}=-\frac{2a(2a-b)}{2a+b}.$$

习 题 5·9(2)

计算:

1. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\div\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$.

2. $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\div\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)$.

3. $\left(5-\frac{a^2-19b^2}{a^2-4b^2}\right)\div\left(3-\frac{a-5b}{a-2b}\right)$.

4. $\left(\frac{a}{a+1}+1\right)\div\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$.

5. $\left[1-\frac{(a-b)^2-c^2}{(a+b)^2-c^2}\right]\div\left[1-\frac{a^2-(b-c)^2}{a^2-(b+c)^2}\right]$.

6. $\frac{x^2-(y-z)^2}{(x-y)^2-z^2}\div\frac{(x+y)^2-z^2}{x^2-(y+z)^2}-1$.

7. $\left[\frac{m^2-n^2}{m^2+2mn+n^2}+\frac{2}{mn}\div\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)^2\right]\div\frac{1}{m+n}$.

8. $\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+y}\left(\frac{x+y}{3x}-x-y\right)\right]\div\frac{x-y}{x}$.

9. $\left(a-\frac{4ab}{a+b}+b\right)\div\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$.

10. $(x-a)\div\left[x-\frac{(x-b)(x-c)}{x+a}\right]$.

§5·10 繁 分 式

我们前面所学到的分式，分子和分母都是整式．有时，我们也会遇到另外一种形式的分式．例如

$$\frac{\frac{a}{b}}{c},\quad \frac{a}{\frac{b}{c}},\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}},\quad \frac{a+\frac{1}{a}}{a-\frac{1}{a}}$$

等等．在这种分式里，分子或分母本身是一个分式，我们把这样的分式，叫做**繁分式**．

繁分式实际上是分式除法的另一种写法，因此可利用分式除法的法则，把它化成普通分式（分子分母都是整式的分式）．这种变换的过程，叫做把繁分式化简．

例 1． 化简繁分式：

(1) $\dfrac{\frac{a+b}{c}}{\frac{a-b}{c}}$；　(2) $\dfrac{x+\frac{1}{a}}{x-\frac{1}{a}}$；　(3) $\dfrac{a}{1+\frac{1}{a}}$；　(4) $\dfrac{1+\frac{1}{a}}{a}$．

【解】

(1) $\dfrac{\frac{a+b}{c}}{\frac{a-b}{c}}=\dfrac{a+b}{c}\div\dfrac{a-b}{c}$

$$=\frac{a+b}{c}\times\frac{c}{a-b}=\frac{a+b}{a-b};$$

(2) $\dfrac{x+\dfrac{1}{a}}{x-\dfrac{1}{a}}=\left(x+\dfrac{1}{a}\right)\div\left(x-\dfrac{1}{a}\right)$

$$=\frac{ax+1}{a}\div\frac{ax-1}{a}$$

$$=\frac{ax+1}{a}\times\frac{a}{ax-1}=\frac{ax+1}{ax-1};$$

(3) $\dfrac{a}{1+\dfrac{1}{a}}=a\div\left(1+\dfrac{1}{a}\right)=a\div\dfrac{a+1}{a}$

$$=a\times\frac{a}{a+1}=\frac{a^2}{a+1};$$

(4) $\dfrac{1+\dfrac{1}{a}}{a}=\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\div a=\dfrac{a+1}{a}\times\dfrac{1}{a}=\dfrac{a+1}{a^2}.$

繁分式也可以应用分式的基本性质来化简，如

(1) $\dfrac{\dfrac{a+b}{c}}{\dfrac{a-b}{c}}=\dfrac{\dfrac{a+b}{c}\times c}{\dfrac{a-b}{c}\times c}=\dfrac{a+b}{a-b};$

(2) $\dfrac{x+\dfrac{1}{a}}{x-\dfrac{1}{a}}=\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{a}\right)\times a}{\left(x-\dfrac{1}{a}\right)\times a}=\dfrac{ax+1}{ax-1};$

(3) $\dfrac{a}{1+\dfrac{1}{a}}=\dfrac{a\times a}{\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\times a}=\dfrac{a^2}{a+1};$

(4) $\dfrac{1+\dfrac{1}{a}}{a}=\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\times a}{a\times a}=\dfrac{a+1}{a^2}.$

例 2. 化简：$\dfrac{2+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{x+\dfrac{x}{x^2-1}}$.

【解 1】 应用分式除法化简：

$$\frac{2+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{x+\dfrac{x}{x^2-1}}=\left(2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\div\left(x+\frac{x}{x^2-1}\right)$$

$$=\frac{2(x-1)(x+1)+(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}\div\frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1}$$

$$=\frac{2x^2-2+x+1-x+1}{(x-1)(x+1)}\div\frac{x^3-x+x}{x^2-1}$$

$$=\frac{2x^2}{(x-1)(x+1)}\times\frac{(x+1)(x-1)}{x^3}=\frac{2}{x}.$$

【解 2】 应用分式的基本性质，把分子分母都乘以 x^2-1，得

$$\frac{2+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{x+\dfrac{x}{x^2-1}}=\frac{2(x^2-1)+(x+1)-(x-1)}{x(x^2-1)+x}$$

$$=\frac{2x^2-2+x+1-x+1}{x^3-x+x}=\frac{2x^2}{x^3}=\frac{2}{x}.$$

例 3. 化简：(1) $\dfrac{\dfrac{c}{b}}{a}$； (2) $\dfrac{c}{\dfrac{b}{a}}$.

【解】

(1) $\dfrac{\dfrac{c}{b}}{a}=\dfrac{\dfrac{c}{b}\times b}{a\times b}=\dfrac{c}{ab}$,

或 $$\frac{\frac{c}{b}}{a}=\frac{c}{b}\div a=\frac{c}{b}\times\frac{1}{a}=\frac{c}{ab};$$

(2) $$\frac{c}{\frac{b}{a}}=\frac{c\times a}{\frac{b}{a}\times a}=\frac{ac}{b},$$

或 $$\frac{c}{\frac{b}{a}}=c\div\frac{b}{a}=c\times\frac{a}{b}=\frac{ac}{b}.$$

注意 必须区别 $\dfrac{\frac{c}{b}}{a}$ 与 $\dfrac{c}{\frac{b}{a}}$，这两个式子不相等，不同之处是两条分数线的长短，较短的线是小括号，较长的线是大括号。

例 4. 化简：$\dfrac{1}{1-\dfrac{1+x}{x-\dfrac{1}{x}}}$.

【解】 $$\frac{1}{1-\dfrac{1+x}{x-\dfrac{1}{x}}}=\frac{1}{1-\dfrac{1+x}{\dfrac{x^2-1}{x}}}=\frac{1}{1-(1+x)\cdot\dfrac{x}{x^2-1}}$$

$$=\frac{1}{1-\dfrac{(1+x)\cdot x}{(x+1)(x-1)}}=\frac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{x-1-x}{x-1}}=1\cdot\frac{x-1}{-1}=1-x.$$

例 5. 化简：$\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}$.

【解】 $$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{1+1\cdot\frac{x}{x+1}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{x}{x+1}}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{x+1+x}{x+1}}}=\frac{1}{1+1\cdot\frac{x+1}{2x+1}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{x+1}{2x+1}}=\frac{1}{\frac{(2x+1)+(x+1)}{2x+1}}$$

$$=\frac{1}{\frac{3x+2}{2x+1}}=1\cdot\frac{2x+1}{3x+2}=\frac{2x+1}{3x+2}.$$

习　题　5·10

化简:

1. $\dfrac{1+\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}$.　　2. $\dfrac{1-c^2}{1+\frac{1}{c}}$.　　3. $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}$.

4. $\dfrac{3a-\frac{3x^2}{a}}{1+\frac{x}{a}}$.　　5. $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{\frac{9}{x}-x}$.　　6. $\dfrac{2x^2-x}{\frac{1}{x^2}-4}$.

7. $\dfrac{x-1+\frac{6}{x-6}}{x-2+\frac{3}{x-6}}$.　　8. $\dfrac{1}{a-\frac{a^2-1}{a+\frac{1}{a-1}}}$.

9. $\dfrac{x+\dfrac{y-x}{1+xy}}{1-x\left(\dfrac{y-x}{1+xy}\right)}$.　　　　10. $\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}}$.

本 章 提 要

1．本章的重要概念

分式，最简分式（既约分式），约分，通分。

2．本章的重要法则

（1）分式的基本性质：

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}=\frac{a\div m}{b\div m}\quad (m\neq 0).$$

（2）分式的分子分母变换符号的法则：

$$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b},\qquad \frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}.$$

（3）分式的加减法则——同分母分式的加减法：

$$\frac{b}{a}\pm\frac{c}{a}=\frac{b\pm c}{a};$$

分母不同的分式的加减法：先通分，再按同分母分式加减法做。

$$\frac{b}{a}\pm\frac{d}{c}=\frac{bc\pm ad}{ac}.$$

（4）分式的乘法法则：

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

（5）分式的除法法则：

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

（6）繁分式的化简法则：

$$\frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

复 习 题 五

1．怎样的代数式叫做整式？怎样的代数式叫做分式？写出两个整式和两个分式来．

2．整式的值一定是整数吗？$3x$ 的值可以是分数吗？举一个例子．

3．分式的值一定是分数吗？$\frac{5}{x+2}$ 的值可以是整数吗？举一个例子．

4．整式内字母可以取任意值吗？a^2+3a-5 内的 a 可以取任意值吗？

5．分式内字母可以取任意值吗？$\frac{5}{x+2}$ 内的 x 可以取任意值吗？有什么限制？

6．叙述分式的基本性质．

7．什么叫做最简分式（既约分式）？写出两个最简分式来．写出两个不是最简分式的分式来，再把这两个分式化成最简分式．

8．下列约分方法是否正确？如果不正确，错在哪里？

(1) $\frac{x^2}{x^6}=\frac{1}{x^3}$；　　(2) $\frac{4x^4}{8x^8}=\frac{1}{4x^4}$；

(3) $\frac{y^2+a^2}{x^2+a^2}=\frac{y^2}{x^2}$；　　(4) $\frac{y^2}{x^2}=\frac{y}{x}$．

9．下列演算，是否正确？如果不正确，错在哪里？

(1) $\frac{x+3}{x}-\frac{a-3}{a}=\frac{ax+3a-ax-3x}{ax}$；

(2) $\frac{x}{x+a}-\frac{x}{x-a}=\frac{x}{x+a}+\frac{x}{x+a}$．

10．下列演算，是否正确？如果不正确，错在哪里？

(1) $\frac{(a-x)^2}{x^2-a^2}=\frac{-(x-a)^2}{x^2-a^2}$；　　(2) $\frac{a-x}{(a^2-x^2)^2}=\frac{1}{(a+x)^2}$．

求下列代数式的值（11～22）：

11．$\frac{a+b}{a-b}$，其中 $a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{3}$．

12．$\frac{b}{a}-\frac{a}{b}$，其中 $a=-3$，$b=-5$．

13. $\dfrac{x^2+2y^2}{2x-3y}$, 其中 $x=0$, $y=\dfrac{1}{3}$.

14. $\dfrac{x^2-2y^2}{x-2y}$, 其中 $x=1$, $y=-1$.

15. $\dfrac{x^2-4y^2}{x-4y}$, 其中 $x=-2$, $y=-1$.

16. $\dfrac{x^3-2x^2-3x+4}{x^3+2x^2-3x+4}$, 其中 $x=1$.

17. $\dfrac{x^3+2x^2-2x+5}{x^3-2x^2+3x-1}$, 其中 $x=-\dfrac{1}{2}$.

18. $\dfrac{(x+3)(x-5)}{(x+2)(x-1)}$, 其中 $x=-1\dfrac{1}{2}$.

19. $\dfrac{x+3}{|x|+3}$, 其中 $x=-5$.　　20. $\dfrac{x-3}{-|x|-3}$, 其中 $x=-3$.

21. $\dfrac{x+3}{|x-3|}$, 其中 $x=-1$.　　22. $\dfrac{3x}{|x-8|}$, 其中 $x=-5$.

在下列分式里,哪些字母的值有哪些限制(23～26)?

23. $\dfrac{3}{x}$.　　24. $\dfrac{x+3}{x-2}$.　　25. $\dfrac{x-3}{x+3}$.　　26. $\dfrac{5}{3-x}$.

化成既约分式(27～32):

27. $\dfrac{x^5y^3-4x^3y^5}{x^3y^2-2x^2y^3}$.　　28. $\dfrac{(x^6-y^6)(x+y)}{(x^3+y^3)(x^4-y^4)}$.

29. $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+2x-63}$.　　30. $\dfrac{3x^2-18bx+27b^2}{2x^2-18b^2}$.

31. $\dfrac{(x^2-25)(x^2-8x+15)}{(x^2-9)(x^2-7x+10)}$.　　32. $\dfrac{(x^2+c^2)^2-4b^2x^2}{x^4+4bx^3+4b^2x^2-c^4}$.

计算(33～42):

33. $\dfrac{1}{2a-3b}+\dfrac{1}{2a+3b}-\dfrac{6b}{4a^2-9b^2}$.

34. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^3+1}$.

35. $\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}-\dfrac{x+2}{(2-x)(x-3)}+\dfrac{x+3}{(3-x)(1-x)}$.

36. $\dfrac{x^3-1}{x^3+1}\cdot\dfrac{x+1}{x-1}$.　　37. $\left(1-\dfrac{x-2}{x^2+x-2}\right)\cdot\dfrac{x+2}{x}$.

38. $\dfrac{x^2+5x+6}{x+1}\div(x^2+6x+8)$.

39. $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}+1}{\dfrac{a-b}{a+b}+1}$.

40. $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}}$.

41. $\dfrac{a}{b+\dfrac{c}{d+\dfrac{e}{f}}}$.

42. $\dfrac{x^2-y^2-z^2+2yz}{\dfrac{x-y+z}{x-y-z}}$.

约简下列分式,再求它的值(43～46):

43. $\dfrac{4a^2+8ab+4b^2}{2a^2-2b^2}$, 其中 $a=6\dfrac{7}{40}$, $b=-1.375$.

44. $\dfrac{b^3-b}{(1+ab)^2-(a+b)^2}$, 其中 $a=-51$, $b=26$.

45. $\dfrac{m^2+n^2-p^2+2mn}{m^2-n^2+p^2+2mp}$, 其中 $m=15$, $n=-7$, $p=-12$.

46. $\dfrac{x^2-3x-18}{x^2-12x+36}$, 其中 $x=23$.

化简(47～50):

47. $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x-1}{\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}-1}$.

48. $\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}+1-\dfrac{1}{x+1}$.

49. $\dfrac{\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bc}}{\dfrac{a^2-(b+c)^2}{ab}}$.

50. $\dfrac{3}{1+\dfrac{3}{1+\dfrac{3}{1-x}}}$.

*化简(51～52):

51. $\left(\dfrac{x-y}{2y-x}-\dfrac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2}\right)\div\dfrac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}$.

52. $\dfrac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n}\cdot\left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right]$.

第六章　比和比例

§6·1　比

在算术里，我们学过两个数的比．现在先来复习一下．

在日常生产和生活中，我们往往需要比较两个数或两个同类的量的大小．例如要比较两个数12与4的大小．

我们说12比4大，或者说12大于4．这个关系可以写做$12>4$．

但有时我们觉得仅仅知道这两个数哪一个大还不够，还要对它们之间的大小关系研究得更深刻一些．为此，我们又有两种研究的角度：

(1) 我们计算它们的差，得$12-4=8$，我们说，12比4大8；

(2) 我们计算它们的商，得$12\div4=3$，我们说，12是4的3倍．

再如我们要比较两个同类的量20米与5米的大小．

从它们的差，我们可以得$20-5=15$，即20米比5米大15米．它们的差还是一个同类的量．

从它们的商，我们可以得$20\div5=4$，即20米是5米的4倍．这个商却只表示一个倍数，它是一个不名数．

当我们从两个数或同类的量的倍数来比较它们的大小时，我们可以用比来表示．例如，数12是数4的3倍，我们可

以说 12 与 4 的比是 3 比 1.

同类的量 20 米是 5 米的 4 倍，我们可以说 20 米与 5 米的比是 4 比 1.

为了表示两个数或两个同类的量的倍数关系，我们用一个符号":"(读做"比")，例如 3 比 1 写做 3:1，4 比 1 写做 4:1.

两个数或两个同类的量的倍数关系不一定是整数倍数，例如数 16 与 6 的倍数关系是 $16\div 6=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$. 我们说 16 是 6 的 $2\frac{2}{3}$ 倍，或者说 16 与 6 的比是 8:3. 又如 10 米与 4 米的倍数关系是 $10\div 4=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$. 我们说 10 米是 4 米的 $2\frac{1}{2}$ 倍，或者说 10 米与 4 米的比是 5:2.

从这里可以看出，比的符号":"实际上与除法里的除号"÷"及分数里的分数线"——"意义相同，所以 8:3 也可以写做 $\frac{8}{3}$，5:2 也可以写做 $\frac{5}{2}$，读起来还是可以读做 8 比 3 与 5 比 2.

注意 我们通常说"5 比 4 大 1"，这句话里的"比"字与"5 比 4"里的"比"字，它们的意义是有不同的. 5 比 4 大 1，是说它们之间的差是 1，即 $5-4=1$，但只说 5 比 4 时，那就是表示 5:4 或 $\frac{5}{4}$.

在代数里，我们用字母表示数，两个数 a 和 b 的比，可以写做 $a:b$. a 和 b 叫做**比的项**，a 叫做比的**前项**，b 叫做比的**后项**，$\frac{a}{b}$ 的值叫做这个比的**比值**（简称**值**）. 这里后项 b 不能等于零.

例如在比 $5a^2:7b^2$ 里，比的前项是 $5a^2$，比的后项是 $7b^2$，比值是 $\frac{5a^2}{7b^2}$.

§6·2 比的基本性质

两个数的比实际上也就是表示这两个数的商，可以写成分式的形式．例如 $a:b$，可以写做 $\frac{a}{b}$．所以分式的基本性质，对于比来说，也是适用的．因此我们有**比的基本性质**：比的前项和后项，乘以或除以相同的不等于零的数或代数式时，比的值不变．即

$$\boldsymbol{a:b=ma:mb} \quad (m\neq 0),$$

$$\boldsymbol{a:b=\frac{a}{m}:\frac{b}{m}} \quad (m\neq 0).$$

根据比的基本性质，我们可以化简一个比，使比的前项和后项没有公因式：

例1． 化简：

(1) $3a^5b^3c:(-18a^3bc^3)$；　(2) $a(a^2-b^2):(a^3-b^3)$；

(3) $(x^2-5x+6):(x^2-6x+8)$；

(4) $\left(a+\frac{1}{a}\right):\left(a-\frac{1}{a}\right)$.

【解】

(1) $3a^5b^3c:(-18a^3bc^3)$

$$=\frac{3a^5b^3c}{-3a^3bc}:\frac{-18a^3bc^3}{-3a^3bc}=-a^2b^2:6c^2;$$

(2) $a(a^2-b^2):(a^3-b^3)$

$$=a(a+b)(a-b):(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$=a(a+b):(a^2+ab+b^2);$$

(3) $(x^2-5x+6):(x^2-6x+8)$

$$=(x-3)(x-2):(x-4)(x-2)=(x-3):(x-4);$$

(4) $\left(a+\frac{1}{a}\right):\left(a-\frac{1}{a}\right)=\left(a+\frac{1}{a}\right)a:\left(a-\frac{1}{a}\right)a$

$$=(a^2+1):(a^2-1).$$

注　在比的前项或后项中有一个带有“-”号时，通常要把这个“-”号放在前项.

例 2. 求下列各比的值：

(1) $3a^3b^2:5a^2b^3$,　　　　其中 $a=-5,\ b=7$;

(2) $(x^2-9):(x^2-6x+9)$,　其中 $x=-2.1$.

分析　先把比写成分式的形式，化简后再代入求值.

【解】　(1) $3a^3b^2:5a^2b^3=\frac{3a^3b^2}{5a^2b^3}=\frac{3a}{5b}=\frac{3(-5)}{5(7)}=-\frac{3}{7}$.

(2) $(x^2-9):(x^2-6x+9)$

$$=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)^2}=\frac{x+3}{x-3}=\frac{-2.1+3}{-2.1-3}$$

$$=\frac{0.9}{-5.1}=-\frac{9}{51}=-\frac{3}{17}.$$

习　题　6·2

化简(1～10)：

1. $(-5a^4b^3c^2d):(-15a^2b^3cd^4)$.　　2. $(x^2-1)^2:(1-x^2)^2$.

3. $(a-b)(b-c):(b+a)(c-b)$.　　4. $(x^2-5x-6):(x^2-1)$.

5. $(a-b)^3:(b-a)^3$.　　6. $(a+b)^3:(b+a)^3$.

7. $\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\right):(a^3-1)$.　　8. $(a^2+1):\left(a+\frac{1}{a}\right)$.

9. $a:\frac{c}{b}$.　　10. $\frac{a}{b}:c$.

求下列各比的值(11～14)：

11. $(x^2+5x-6):(2-x-x^2)$，当 $x=-2\frac{1}{2}$.

12. $(x^8-y^8):(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)$，当 $x=5.321,\ y=-2.321$.

13. $(a^2+b^2):(a+b)(a-b)$, 当 $a=-3$, $b=-0.03$.

14. $\left(x+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x^3}\right)$, 当 $x=-1\frac{1}{2}$.

§6·3 比的反比

一个比的前项和后项对调所成的比叫做原来的比的反比.

例如: $3:2$ 是 $2:3$ 的反比;

$a:b$ 的反比是 $b:a$;

$2ab:5cd$ 是 $5cd:2ab$ 的反比;

$(x+y):(x-y)$ 的反比是 $(x-y):(x+y)$.

注 一个比的前项如果是 0, 那它就没有反比了.

例 1. 求: (1) $5a:(-6b)$ 的反比;

(2) $3x^2:(x^2-y^2)$ 的反比.

【解】 (1) $5a:(-6b)$ 的反比是 $-6b:5a$;

(2) $3x^2:(x^2-y^2)$ 的反比是 $(x^2-y^2):3x^2$.

例 2. 求下列各比的值, 它们的反比及反比的值, 再求这两个比值的积.

(1) $(x^2-4):(x^2-4x+4)$, 当 $x=-3$;

(2) $\left(a+\frac{1}{a}\right):\left(a-\frac{1}{a}\right)$, 当 $a=-0.3$.

【解】

(1) $$\begin{aligned}(x^2-4):(x^2-4x+4)&=(x-2)(x+2):(x-2)^2\\&=(x+2):(x-2),\end{aligned}$$

它的反比是

$$(x-2):(x+2).$$

当 $x=-3$ 时, 原来的比的值是

$$\frac{x+2}{x-2}=\frac{-3+2}{-3-2}=\frac{-1}{-5}=\frac{1}{5},$$

它的反比的值是

$$\frac{x-2}{x+2}=\frac{-3-2}{-3+2}=\frac{-5}{-1}=5.$$

两个比值的积是

$$\frac{1}{5}\times 5=1.$$

(2) $\left(a+\frac{1}{a}\right):\left(a-\frac{1}{a}\right)=(a^2+1):(a^2-1)$,

它的反比是

$$(a^2-1):(a^2+1).$$

当 $a=-0.3$ 时,原来的比的值是

$$\frac{a^2+1}{a^2-1}=\frac{(-0.3)^2+1}{(-0.3)^2-1}=\frac{1.09}{-0.91}=-\frac{109}{91},$$

反比的值是

$$\frac{a^2-1}{a^2+1}=\frac{(-0.3)^2-1}{(-0.3)^2+1}=\frac{-0.91}{1.09}=-\frac{91}{109}.$$

两个比值的积是

$$\left(-\frac{109}{91}\right)\times\left(-\frac{91}{109}\right)=1.$$

从例 2 可以看出,一个比和它的反比的乘积,不论它们的值如何,总是等于 1.

习 题 6·3

求下列各比的反比并化简(1～5):

1. $-3a^2:5ab$.

2. $(x^2-y^2):\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)$.

3. $(ab+a+b+1):(ab-1-a+b)$.

4. $(a^2-x^2-2xy-y^2):(a^2-2ax+x^2-y^2)$.

5. $[(a+b-c)(a-b-c)-(a+b+c)(a-b-c)]:[(a-b+c)^2$
$-(b+c-a)^2]$.

求下列各比的反比和反比的值(6～8):

6. $3a^2:(a^2-1)$, $a=-2$.

7. $(a^2+2ab+b^2):(a^2-ab-2b^2)$, $a=2.1$, $b=-1.1$.

8. $\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}\right):\left(\frac{x^3}{y^3}-1\right)$, $x=-0.2$.

§6·4 比　　例

在算术里，我们已经知道，用一个等号把两个比连接起来表示它们的值相等的式子叫做比例.

例如：$16:8=2:1$；$6:10=3:5$ 等，都是比例，

$15:21=32:x$ 也是一个比例.

在代数里，比例也有同样的意义．例如，下面的式子都是比例：

$$a:b=c:d,$$

$$a:b=b:c,$$

$$(3x-5a):(6x-a)=5b:7c.$$

因为比可以写成分式的形式，所以比例也可以写成两个分式用等号连接起来的形式，例如 $a:b=c:d$ 可以写做

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

我们知道比有前项和后项，比例里有两个比，所以就有两个前项和两个后项.

和在算术里一样，我们把比例里的四个代数式叫做比例的项，依照前后次序，第一项和第四项叫做比例的外项，第二

项和第三项叫做比例的内项.

例如在比例 $a:b=c:d$ 里. a 和 d 是比例的外项, b 和 c 是比例的内项.

§6·5 比例的基本性质

在算术里,我们知道,一个比例的外项的积一定等于它的内项的积,这个性质叫做比例的基本性质.

例如在比例 $10:6=5:3$ 里,外项的积 $10\times3=30$, 内项的积 $6\times5=30$, $\therefore$ $10\times3=6\times5$.

在代数里, 这个性质也还是存在的. 那就是**比例的基本性质**: 在一个比例里,外项的积等于内项的积. 即在比例

$$\boldsymbol{a:b=c:d} \text{ 里}, \ \boldsymbol{ad=bc}.$$

§6·6 解 比 例

在算术里, 我们已经学习过解比例了. 解比例就是求比例里的未知项. 在算术里, 这个未知项通常是用字母 x 来表示的.

例 1. 解比例:

$$3:5=12:x.$$

【解】 根据比例的基本性质,

$$3x=5\times12,$$

即
$$3x=60.$$

这里 60 是 3 与 x 的积. 我们知道,已知两数的积与其中的一个因数,要求另一个因数,只要用除法,

$$\therefore \quad x=60\div3=20.$$

例 2. 解比例：$24:x=12:7$.

【解】 根据比例的基本性质，

$$12x=24\times7,$$

即

$$12x=168.$$

$$\therefore\quad x=168\div12=14.$$

在代数里，这样的解比例的方法也还是适用的。

例 3. 解比例：$a:b=x:c$，这里 x 是未知项。

【解】 根据比例的基本性质，

$$bx=ac,$$

$$\therefore\quad x=ac\div b,$$

即

$$x=\frac{ac}{b}.$$

例 4. 已知比例：$(a^2-b^2):(a^3-b^3)=(a^3+b^3):x$，求 x.

【解】 $(a^2-b^2)x=(a^3-b^3)\cdot(a^3+b^3)$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad x&=\frac{(a^3-b^3)(a^3+b^3)}{a^2-b^2}\\&=\frac{(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a-b)}\\&=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)\\&=a^4+a^2b^2+b^4.\end{aligned}$$

习 题 6·6

在下列各比例中，说明哪些是前项，哪些是后项，哪些是外项，哪些是内项(1～4)：

1. $3:5=12:20$.
2. $a:3a=5b:15b$.
3. $3a:5b=6a:10b$.
4. $a:x=b:a^2$.

根据下列的叙述列出比例(5～10)：

5. a 与 b 的比等于 c 的平方与 d 的平方的比.

6. a, b 两数的和与差的比等于 c 与 d 的和与差的比. ($a>b$, $c>d$.)

7. a 与 b 的和的平方比 a 与 b 的各自平方的和等于 c 与 d 的和的立方比 c 与 d 的各自立方的和.

8. a 与 b 的比等于 c 与 d 的比的反比.

9. a 与 b 的比等于它们的倒数的比的反比.

10. a 与 b 的相反的数的比等于 a 的相反的数与 b 的比.

求下列各比例中的 x 的值(11～14)：

11. $3:x=5:16$.

12. $12:1\frac{1}{3}=5.2:x$.

13. $3a^2:5b^2=\frac{7a^2}{b^2}:x$.

14. $1:(a-b)=\frac{1}{b-a}:x$.

解比例(x 表示未知项)(15～18)：

15. $a:x=a^2:b$.

16. $(a^2-b^2):(a-b)^2=(b-a)^2:x$.

17. $(a^2-b^2):x=(b^2+a^2):(a^4-b^4)$.

18. $x:(a^2-2a+1)=(a^2-1):(1-a)^3$.

先用其他字母的代数式表示 x, 再求 x 的值(19～20)：

19. $(a^2+3a+2):x=(a+2)^2:(a^2+a-2)$, 其中 $a=-1\frac{1}{3}$.

20. $(a^2-b^2):(a^2-ab)=x:3$, 其中 $a=-2b$.

§6·7 成正比例的量

在算术里，我们学习过成正比例的量. 现在我们来复习一下。

成正比例的量：两种相关联的量，在其他条件不变的时候，如果其中的一种量扩大几倍，另一种量也扩大相同的倍数，一种量缩小几倍，另一种量也缩小相同的倍数，那么这两种量就叫做成正比例，它们之间的关系叫做正比例关系.

例1. 汽车2小时行72公里，用同样的速度行6小时，可以行多少公里？如果要行288公里，需要多少小时？

【解】 这里有两种相关联的量，一种是时间，另一种是路程. 这里有一个不变的条件，就是同样的速度.

我们现在把三次行路的两种量的数值，列表如下(要求的未知量，分别用字母 x 与 y 来表示)：

量的种类	第一次行路时的数值	第二次行路时的数值	第三次行路时的数值
时间(小时)	2	6	y
路程(公里)	72	x	288

同一次里两种量的数值，叫做**一组对应的值**，例如2和72，6和 x，y 和288，都是对应值.

我们知道，如果速度不变，那么时间和路程这两种量是成正比例的量，即第一种量扩大或缩小几倍，第二种量也扩大或缩小同样的倍数.

(1) 拿时间来说，第二次对第一次扩大的倍数是 $6:2$. 拿路程来说，第二次对第一次扩大的倍数是 $x:72$. 因为倍数相等，得比例

$$6:2=x:72.$$

解比例，

$$2x=6\times72,$$

$$x=\frac{6\times72}{2},$$

$$x=216.$$

答：汽车在6小时内行路216公里.

(2) 拿时间来说，第三次对第一次扩大的倍数是 $y:2$. 拿路程来说，第三次对第一次扩大的倍数是 $288:72$. 因为倍数相等，得比例

$$y:2=288:72.$$

解比例，

$$72y=2\times288,$$

$$y=\frac{2\times288}{72},$$

$$y=8.$$

答：汽车行288公里需要8小时.

注意 在判定成正比例的量时，必须注意两点：

(1) 其他条件不变. 如在这里必须速度不变. 如果速度有变化，那末时间和路程就不是成正比例的量了.

(2) 倍数相同. 如果只知道一种量扩大时另一种量也扩大，而倍数不同，那末这两种量也不是成正比例的量.

因为两个同类的量的倍数就是它们的比，所以我们对成正比例的量，也可以作这样的叙述：

两种相关联的量，在其他条件不变的时候，如果一种量的任意两个数值的比总等于另一种量的两个对应的数值的比，那么这两种量就叫做成正比例的量.

如果我们把一种量的一些数值用字母 a_1, a_2, a_3, …来表示，把另一种量的对应的数值用字母 b_1, b_2, b_3, …来表示，如下表：

量的种类	一组对应值	另一组对应值	另一组对应值	…
一种量 a	a_1	a_2	a_3	…
另一种量 b	b_1	b_2	b_3	…

注 $a_1, a_2, a_3, \cdots; b_1, b_2, b_3, \cdots$ 都表示不同的数.

那么如果这两种量成正比例关系，就有比例：

$$a_1:a_2=b_1:b_2, \quad a_1:a_3=b_1:b_3, \quad \cdots.$$

现在我们再来看看这些量里有负值时的情况.

例 2. 在东西向的公路上，甲、乙、丙、丁四人同时经过一车站，甲、乙分别以每小时 9 公里和 12 公里的速度向东，丙以每小时 18 公里的速度向西. 当甲到达这个车站以东 30 公里的时候，乙和丙各到达了哪里？如果这时丁到达了车站以西 20 公里处，丁的速度和方向怎样？

【解】 我们把向东方向作为正方向，那末速度和路程，都以向东的取正值，向西的取负值. 把这四个人的速度和路程，列表如下(未知的量分别用字母 x, y, z 表示)：

量的种类	甲	乙	丙	丁
速度(每小时公里)	9	12	−18	z
路程(公里)	30	x	y	−20

如果时间不变，那末速度和路程这两种量是成正比例的量，即这两种量的对应值之间的比应该相等. 得比例：

(1) $9:12=30:x$, (2) $9:(-18)=30:y$,

(3) $9:z=30:(-20)$.

解这些比例：

(1) $9x=12\times 30$, $x=\dfrac{12\times 30}{9}=40$;

(2) $9y=-18\times30$, $y=\dfrac{-18\times30}{9}=-60$;

(3) $30z=9\times(-20)$, $z=\dfrac{9\times(-20)}{30}=-6$.

答：乙这时在车站东面 40 公里处，
丙这时在车站西面 60 公里处，
丁的速度是向西每小时 6 公里.

注 在算术里，我们说的倍数关系总只讲正数倍数，在代数里，我们也讲负数倍数，如 9 是 -18 的 $-\dfrac{1}{2}$ 倍，-18 是 9 的 -2 倍.

§6·8 成反比例的量

在算术里，我们也学习过成反比例的量．现在来复习一下.

成反比例的量：两种相关联的量，在其他条件不变时，如果其中的一种量扩大几倍，另一种量反而缩小相同的倍数，一种量缩小几倍，另一种量反而扩大相同的倍数，那么这两种量就叫做成反比例，它们之间的关系叫做反比例关系.

例 1. 从甲地到乙地，一车以平均速度每小时 12 公里行驶，4 小时到达．如果第二车以平均速度每小时 24 公里行驶，要几小时到达？如果第三车要在 1 小时内到达，平均速度应该多少？

【解】 这里有两种相关联的量，一种是速度，另一种是时间．这里有一个不变的条件，就是甲地到乙地的距离.

我们现在把三辆车子的两种量的数值，列表如下（要求的未知量，分别用字母 x 与 y 来表示）：

量的种类	第一车	第二车	第三车
速度(每小时公里)	12	24	y
时间(小时)	4	x	1

同一车的两种量的数值,叫做一组对应的值,如12和4, 24和x, y和1, 都是对应值.

我们知道,如果距离不变,那么速度和时间这两种量是成反比例的量,即第一种量扩大或缩小几倍,第二种量反而缩小或扩大同样的倍数.

(1) 拿速度来说,第二车对第一车扩大的倍数是$24:12$. 拿时间来说,第二车对第一车缩小的倍数是$4:x$. 因为倍数相等,得比例

$$24:12=4:x.$$

解比例,

$$24x=12\times4,$$

$$x=\frac{12\times4}{24}=2.$$

答: 第二车2小时可到.

(2) 拿速度来说,第三车对第一车扩大的倍数是$y:12$. 拿时间来说,第三车对第一车缩小的倍数是$4:1$. 因为倍数相等,得比例

$$y:12=4:1.$$

解比例,

$$y=12\times4,$$

$$y=48.$$

答: 第三车的速度应该是每小时48公里.

注意 在判定成反比例的量时,必须注意两点:

(1) 其他条件不变. 如这里的路程相同.

(2) 倍数相同. 如果只知道一种量扩大时另一种量缩小,而倍数不同,那末这两种量就不能说是成反比例的量.

因为两个同类的量的倍数就是它们的比，所以我们对成反比例的量，也可以作这样的叙述：

两种相关联的量，在其他条件不变的时候，如果一种量的任意两个数值的比总等于另一种量的两个对应的数值的比的反比，那么这两种量就叫做成反比例的量.

如果我们把一种量的一些数值用字母 a_1, a_2, a_3, …来表示，把另一种量的对应的数值用字母 b_1, b_2, b_3, …来表示，如下表：

量的种类	一组对应值	另一组对应值	另一组对应值	…
第一种量 a	a_1	a_2	a_3	…
第二种量 b	b_1	b_2	b_3	…

那么如果这两种量成反比例关系，就有比例：

$$a_1:a_2=b_2:b_1,\quad a_1:a_3=b_3:b_1,\quad \cdots.$$

现在我们再来看这些量里有负值时的情况.

例 2. 在东西向的公路上，甲车站在乙车站的东面. 有四车在正午同时经过乙站. 第一车以平均速度每小时 12 公里向东 3 小时后到达甲站. 如第二车以平均速度每小时 24 公里向东，什么时候到达甲站？如第三车以平均速度每小时 18 公里向西，什么时候经过甲站？如第四车在 1 小时前经过甲站，它的速度和方向怎样？

【解】 我们把向东方向作为正方向，那末速度向东是正的，向西是负的. 时间方面，拿以后几小时作为正，拿以前几小时作为负. 把这四车的速度和时间，列表如下(未知的量分别用字母 x, y, z 表示)：

量的种类	第一车	第二车	第三车	第四车
速度(每小时公里)	12	24	−18	z
时间(小时)	3	x	y	−1

我们知道，甲乙两站的距离不变，速度和时间这两种量是成反比例的量，即一种量的两个数值的比与另一种量的对应值的比的反比相等. 得比例:

(1) $12:24=x:3$,　　(2) $12:(-18)=y:3$,

(3) $12:z=(-1):3$.

解这些比例:

(1) $24x=3\times12$,　　$x=\frac{3\times12}{24}=1\frac{1}{2}$;

(2) $-18y=3\times12$,　　$y=\frac{3\times12}{-18}=-2$;

(3) $-1z=3\times12$,　　$z=\frac{3\times12}{-1}=-36$.

答: 第二车在 $1\frac{1}{2}$ 小时后到达甲站，

第三车在 2 小时前过甲站，

第四车的速度是平均每小时 36 公里向西.

习题 6·8

1. 某建筑工地原采用 4 辆汽车运土，每天运 56 立方米，如果要每天运 98 立方米，要用同样的汽车几辆?

2. 某生产队要收割 750 亩小麦，3 天收割了 450 亩，照这样的速度，其余的还要几天可以收割完?

3. 一本文艺书，平均每天读 20 页，15 天读完，如果每天平均读 12 页，几天可以读完?

4. 一列火车 3 小时行路 150 公里. 有一段路程，这列火车行了 4

小时，假定速度不变，这段路程有多少公里？

5. 一列火车每小时平均行 50 公里，有一段路程，火车行驶 36 分钟. 如果另一列火车在这段路上行了 40 分钟，第二列火车的平均速度每小时多少公里？

6. 一列火车在 a 小时内行路 b 公里，如果这列火车速度不变，在 c 小时内行路多少公里？（答数用 a, b, c 的代数式来表示.）

7. 如果汽车从甲地到乙地以每小时 a 公里的速度行驶 b 小时，回来时要在 c 小时内赶回，需用怎样的速度？

8. 汽车从甲地到乙地以每小时 a 公里的速度行驶 b 小时，回来时速度较去时增加 20%，回来时共需多少时间？

9. 下面表内是两个量的一些对应的数值，根据这些数值来判断，它们是不是成正比例：

(1)

a	$a_1=6$	$a_2=9$	$a_3=15$
b	$b_1=8$	$b_2=12$	$b_3=20$

(2)

x	$x_1=18$	$x_2=26$	$x_3=34$
y	$y_1=20$	$y_2=28$	$y_3=36$

10. 下面表内列出了两个量的一些对应的数值，根据这些数值来判断，它们是不是成反比例：

(1)

a	$a_1=24$	$a_2=36$	$a_3=27$
b	$b_1=18$	$b_2=12$	$b_3=16$

(2)

x	$x_1=24$	$x_2=32$	$x_3=40$
y	$y_1=20$	$y_2=12$	$y_3=4$

11. a 和 b 是两种成正比例的量，求下表中未知量的值：

a	$a_1=16$	$a_2=24$	$a_3=-8$	$a_4=?$	$a_5=?$
b	$b_1=9$	$b_2=?$	$b_3=?$	$b_4=15$	$b_5=-2$

12. a 和 b 是两种成反比例的量，求下表中未知量的值：

a	$a_1=16$	$a_2=24$	$a_3=-8$	$a_4=?$	$a_5=?$
b	$b_1=9$	$b_2=?$	$b_3=?$	$b_4=15$	$b_5=-2$

13. x 和 y 是两种成正比例的量，求下表中的未知量：

x	$3a^2b$	$16ab$	$a+b$	x_3	x_4
y	$5ab^2$	y_1	y_2	$-16ab$	$a+b$

14. x 和 y 是两种成反比例的量，求下表中的未知量：

x	$3a^2b(a+b)$	$16ab$	$a+b$	x_3	x_4
y	$5ab^2(a-b)$	y_1	y_2	$-16ab$	$a+b$

本 章 提 要

1．本章的重要概念

比，比的前项和后项，比值．

比的反比．

比例，比例的项（内项和外项）．

成正比例的量，成反比例的量．

2．比的基本性质

$$\left.\begin{aligned} a:b&=ma:mb,\\ a:b&=\frac{a}{m}:\frac{b}{m},\end{aligned}\right\}\quad (m\neq 0).$$

3．比例的基本性质　如 $a:b=c:d$，则 $ad=bc$．

复习题六

1. 写出两个比，并说明它们的前项、后项和比值，写出它们的反比.

2. 写出两个比例，并说明每个比例的内项和外项.

3. 一个比有没有等号？一个比例呢？一个比例里有几个比？

4. 叙述比的基本性质，并用字母来表达.

5. 叙述比例的基本性质，并用字母来表达.

6. 怎样的两种量叫做成正比例的量？

如果有两种量，一种量扩大或缩小时，另一种量也扩大或缩小，这样的两种量能不能肯定是成正比例的量？为什么？

7. 怎样的两种量叫做成反比例的量？

如果有两种量，一种量扩大或缩小时，另一种量反而缩小或扩大，这样的两种量能不能肯定是成反比例的量？为什么？

8. 一个正方形的边长扩大的时候，它的面积也扩大. 正方形的面积与它的边长是不是成正比例的量？为什么？列表表示它们的三组对应值.

化简(9～12)：

9. $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right):(x+y)$.

10. $\frac{a^3+b^3}{a-b}:\frac{a+b}{a^3-b^3}$.

11. $(a^2+2ab+b^2-c^2):(a^2-b^2-2bc-c^2)$.

12. $\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}:\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$.

在下列比例中，求 x(13～16)：

13. $2a^3b:5ab^3=(-2a)^2:x$.

14. $(a^2-b^2):(a^3+b^3)=x:(a-b)^2$.

15. $(a^2-2a+1):x=(a^2-3a+2):(a^2-a-2)$.

16. $(a^3b^2)^2:(a^2b^3)^2=x:(a^2b)^5$.

17. 如果 a 与 b 是两个成正比例的量，而且知道 $a=16$ 时，$b=24$；当 $a=-24$ 时，b 的对应值是多少？$b=30$ 时，a 的对应值是多少？

18．如果 x 与 y 是两个成反比例的量，而且知道 $x=30$ 时，$y=56$，当 $x=-15$ 时，y 的对应值是多少？$y=20$ 时，x 的对应值是多少？

19．如果 x 与 y 是两个成正比例的量，而且知道 $x=a^2-b^2$ 时，$y=3a^2b$；若 $y=a^2-b^2$，$x=$？

20．如果 x 与 y 是两个成反比例的量，而且知道 $x=a^2-b^2$ 时，$y=3a^2b$，若 $y=b^2-a^2$，$x=$？

总复习题

1．如 $4<a<16$，写出所有 a 的整数值来；写出所有 a 的偶数值来；写出所有 a 的奇数值来；写出所有 a 的质数的值来．

2．如 $3<|a|<6$，写出所有 a 的整数值来；写出所有 a 的正整数值来；写出所有 a 的负整数值来．

3．如 $|a|\leqslant 2$，写出所有 a 的整数值来；写出所有 a 的正整数值来；写出所有 a 的负整数值来．

注　$\leqslant 2$ 读做小于或等于 2，表示既可以小于 2，也可以等于 2．

4．如 a 的绝对值不大于 3，写出所有 a 的整数值来；写出所有 a 的正整数值来；写出所有 a 的负整数值来．

求下列代数式的值（5～10）：

5．(1) $-a^4$，其中 $a=-3$；　　(2) $(-a)^5$，其中 $a=-\dfrac{2}{3}$；

(3) $-a^{103}$，其中 $a=-1$；　　(4) $(-a)^{150}$，其中 $a=0$．

6．(1) $a-b$，其中 $a=-3$，$b=13$；

(2) $2a-3b$，其中 $a=3\dfrac{1}{3}$，$b=-5\dfrac{1}{2}$．

7．(1) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{3}$，其中 $x=\dfrac{1}{2}$；

(2) $\dfrac{4}{x}-\dfrac{x}{4}$，其中 $x=-\dfrac{1}{3}$．

8．(1) $3x^3+2x^2-x+1$，其中 $x=1\dfrac{1}{3}$；

(2) x^3-2x^2-3x-2，其中 $x=-\dfrac{1}{2}$．

9．$\dfrac{1+a-3a^2}{1-a+3a^2}$，其中 (1) $a=-2$；(2) $a=-\dfrac{2}{3}$．

10．$\dfrac{(a-b)^2}{a^2b^2}$，其中 (1) $a=-3$，$b=-2$；

(2) $a=0.2$，$b=-0.3$．

计算(11～16):

11. $13\frac{5}{12}+\left(-3\frac{7}{15}\right)+(-13)+4\frac{11}{18}$.

12. $3.73+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-3\frac{5}{6}\right)+9.37+\left(-20\frac{1}{10}\right)+4\frac{5}{6}$.

13. $(-1932)-[(-852)-932-(-322)]$.

14. $32\frac{3}{4}-[(-4.15)-3]$.

15. $\left[1-\frac{1}{12}-\left(-\frac{2}{15}\right)\right]-\left[\left(-\frac{1}{12}\right)-\frac{7}{15}+\left(-1\frac{19}{20}\right)\right]$.

16. $12\frac{5}{12}-\left(-3\frac{17}{18}\right)-4\frac{3}{4}+\left(-4\frac{11}{18}\right)-1\frac{1}{24}$.

17. 计算: $|a+b|$, $|a|+|b|$ 及 $|a|+|b|-|a+b|$,
当 $a=-2\frac{1}{2}$, $b=-3\frac{1}{3}$.

18. 计算: $|a+b|$, $|a|+|b|$ 及 $|a|+|b|-|a+b|$,
当 $a=-5.32$, $b=+3.47$.

19. 计算: $|a-b|$, $|a|+|b|$ 及 $|a|+|b|-|a-b|$,
当 $a=-2\frac{1}{2}$, $b=-5\frac{1}{3}$.

20. 计算: $|a-b|$, $|a|+|b|$ 及 $|a|+|b|-|a-b|$,
当 $a=-3.245$; $b=-5.148$.

计算(21～24):

21. $(-0.1)\times\left[(-5)\times(-12)\times(-7)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{21}\right)\right]$.

22. $(-6.4)\times\left[1\times\left(-1\frac{1}{2}\right)\times 10.8354\times 0\times(-3.8)\right]$.

23. $(-1)-\left(-60\frac{1}{2}\right)\times\frac{4}{11}$.

24. $1.12\times 3\frac{1}{8}-(-1.75)\times 2\frac{2}{7}+(-3.4)\times 1.25$.

25. 求 $-\frac{1}{3}$ 与 $\frac{1}{15}$ 的和的倒数的相反数.

26. 求 $\frac{1}{5}$ 的相反数与 0.3 的倒数的和的平方.

27. 求 -3.2 与 5.4 的绝对值的和的相反的数.

28. 求 -5 与 0.3 的和的绝对值的相反的数.

29. 把 3, -2, 0.4 等三个数的倒数按照由小到大的次序排列，并用不等号连接起来.

30. 把-5, $\frac{1}{6}$, 0.17 等三个数的相反的数按照由小到大的次序排列，并用不等号连接起来.

31. 计算: $4\times(-0.5)^2-\left(-2\frac{2}{3}\right)\div(-2)^3+(-5)$.

32. 计算: $\left(-1\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{3}{4}\right)-4\times\left(-1\frac{1}{2}\right)^3\div\left(-\frac{27}{11}\right)$.

33. 求值: $3a^2-2b^3$, 其中 $a=-1$, $b=-2$.

34. 求值: $\frac{2x^4-3y^3}{1-x^2}$, 其中 $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{3}$.

计算(35～41):

35. $\left(-\frac{2}{3}x^{n-1}y\right)\left(1\frac{1}{5}xy^{m-1}\right)$ （m, n 是大于 1 的自然数).

36. $\left(-1\frac{1}{2}x^2y^{n-1}z\right)\left(-1\frac{1}{3}xyz^n\right)$ （n 是大于 1 的自然数).

37. $[-(-2a^2)^2]^3$.

38. $-(-3ab^2c^3)^3$.

39. $(-x^2)^3\cdot(x^5)^4$.

40. $(ab^2c^3)^3-(0.5ab^2c^3)^2(4ab^2)(-5c)^3$.

41. $4(x-2y+3z)-2(x+y-2z)-3(-x+y-3z)$.

用直式计算(42～47):

42. $(2x^2+3y^2-4xy)(3xy+3x^2-2y^2)$.

43. $(3a^3-5a^2b+6b^3)(-3a^2-4ab+5b^2)$.

44. $(6a^3+a^2-29a+21)\div(2a-3)$.

45. $(5x^2-19x^3+17x+6x^4-4)\div(1-5x+3x^2)$.

46. $(x^7+y^7)\div(x+y)$.

47. $(x^7-y^7)\div(x-y)$.

48. 如 $A=3x^2-4x+1$, $B=5x^3-2x^2+6x-7$, $C=x-1$,
求 (1) $AC-B$; (2) $AB\div C$.

用乘法公式演算(49～56):

49. (1) $(a+2b-3c)^2$;

(2) $(a-2b-3c)(a+2b+3c)$.

50. (1) $(a-2b-3c)(a+2b-3c)$;

(2) $(-a+2b-3c)(a-2b-3c)$.

51. (1) $(a+2b+c-2d)(a-2b+c+2d)$;

(2) $(a-b+2c-3d)(a+b-2c+3d)$.

52. (1) $(3a^5-2b^4)^2\cdot(3a^5+2b^4)^2$;

(2) $(2x^2-3y^3)^2\cdot(4x^4+6x^2y^3+9y^6)^2$.

53. $(a^2+b^3)^3(a^4-a^2b^3+b^6)^3$.

54. $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$.

55. $(x+3)(x-5)+(x-7)(x+9)$.

56. $(2x+3)(3x+1)-(2x-1)(3x-2)$.

57. 用简便方法计算:

(1) 298×302;　　(2) 15.4×16.6.

58. 用简便方法计算:

(1) $(59.9)^2$;　　(2) $(502)^2$.

59. 先化简再求值:

$5x(y-z)-\{2z(3x-2y)-[4y(3x+z)-8(4xy-xz+yz)]\}$,

其中 $x=-\dfrac{2}{3}$, $y=-\dfrac{1}{2}$, $z=-5$.

60. 先化简再求值:

$(x^3-2)^2-(x^3+2)^2$, 其中 $x=-2$.

分解因式(61～65):

61. $a^3+a^2+b^3-b^2$.

62. $x^6-x^4-27y^6+9y^4$.

63. $xz-yz-x^2-y^2+2xy$.

64. $x^2-4xy+4y^2-z^2-2z-1$.

65. x^4-8x^2-9.

化简(66～70):

66. $\dfrac{a^2-2ab+b^2-a+b}{a^2-b^2}$.　　67. $\dfrac{3y-3x+9x^2-9y^2}{x^3-y^3}$.

68. $\dfrac{1-3x+3x^2-x^3}{x^4-2x^2+1}$.　　69. $\dfrac{6a^3+18a^2-60a}{15a^4+90a^3+75a^2}$.

70. $\dfrac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x}+4}{-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x}+1}$.

演算(71～76):

71. $\left(\dfrac{3x^2+1}{x^3-1}-\dfrac{x-1}{x^2+x+1}\right)\left(1+\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x^2+5x}{x^2+x}\right)$.

72. $\left(\dfrac{2a}{2a+b}-\dfrac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right)\div\left(\dfrac{2a}{4a^2-b^2}+\dfrac{1}{b-2a}\right)$.

73. $\left[\dfrac{m^2-n^2}{m^2+2mn+n^2}+\dfrac{2}{mn}\div\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)^2\right]\div\dfrac{1}{m+n}$.

74. $\left[\dfrac{a^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{ab+b^2}\div\dfrac{b}{a^2+ab}\right)\right]\times\dfrac{a-b}{b}$.

75. $\left[\dfrac{2}{3x}-\dfrac{2}{x+y}\left(\dfrac{x+y}{3x}-x-y\right)\right]\div\dfrac{x-y}{x}$.

76. $\left(a-\dfrac{4ab}{a+b}+b\right)\div\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{b-a}-\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\right)$.

依照下面的叙述列出代数式(77～85):

77. 两数 a 与 b 的和的平方除以它们的倒数的和.

78. 两数 a 与 b 的比与它的反比的和的平方.

79. 一个两位数，它的个位数上的数是 a，它的十位数上的数是个位数上的数的平方.

80. 一个三位数，它的十位数上的数是 x，它的个位数上的数比十位数上的数的平方小 4，它的百位数上的数比个位数上的数小 2.

81. a 与 b 的和的绝对值加上它们的绝对值的和.

82. a 与 b 的差的绝对值加上它们的绝对值的和.

83. 两个数 a 与 b 的倒数的比的反比.

84. 一个边长是 a 的正方形的周长.

85. 一个周长是 a 的正方形的面积.

如 m、n 是自然数，演算下列各题(86～94):

86. $(a^m)^2\cdot(a^n)^3$.　　87. $(a^{m+1}b^{n+2})^2$.

88. $a^{2m+n}\div a^{m+n}$.　　89. $a^{2m+3n}\div(a^{m+n})^2$.

90. $(a^{m+1})^2\div(a^{2m+1})$.　　91. $(a^m+b^n)^2$.

92. $(a^m-b^n)^2$.　　93. $(a^m+b^n)(a^m-b^n)$.

94. $(a^m-b^n)^3$.

如 m、n 是自然数,分解下列因式(95～100):

95. $a^{2m}+2a^m+1$.　　96. $a^{4m}-b^{8n}$.

97. $a^{3m}+b^{6n}$.　　98. $a^{2m+2}-2a^{m+2}+a^2$.

99. $a^{3m+6}+a^3b^3$.　　100. $a^{3m+3}-a^2b^{3m}$.

习 题 答 案

第 一 章

习题 1·1 8. 349; 9. 10; 10. 719; 11. 50; 12. 1; 13. 30.5; 14. 20; 15. 2.1144; 16. 0.04; 17. $\frac{27}{700}$; 18. $7\frac{1}{5}$; 19. $\frac{1}{25}$; 20. 1.

习题 1·6 3. (2) 10, (3) 56, (4) 1.64, (5) 0.06.

习题 1·8 2. (11) $3\frac{2}{3}$, (12) $-2\frac{1}{12}$, (13) $-3\frac{5}{6}$, (14) $2\frac{2}{35}$, (15) 9.33, (16) -46.937, (17) 2.396, (18) 18.96, (19) $3\frac{19}{30}$, (20) $-8\frac{113}{300}$; 3. (1) 0, (2) 19, (3) 0, (4) 0.

习题 1·9 1. -124; 2. -189; 3. 390; 4. 1.5; 5. $39\frac{2}{3}$; 6. $11\frac{2}{11}$; 7. 9.04; 8. 7.

习题 1·10 2. (13) -11, (14) -33, (15) -5, (16) -5.7, (17) $1\frac{3}{4}$, (18) $-5\frac{11}{30}$, (19) $-\frac{7}{8}$, (20) 14.

习题 1·11 1. $-5\frac{1}{3}$; 2. 400; 3. $-18\frac{3}{35}$; 4. 9.69; 5. $-\frac{1}{3}$; 6. -3; 7. -3.635; 8. $-26\frac{1}{3}$.

习题 1·12 1. 30; 2. -50; 3. -16; 4. -5; 5. -1; 6. 24.3; 7. -6; 8. $\frac{77}{150}$; 9. -0.57; 10. -27.68.

习题 1·13(1) 13. 1; 14. $-2\frac{1}{3}$; 15. 3.48; 16. $-2\frac{7}{8}$.

习题 1·13(2) 1. 9600; 2. 0.6; 3. -1.2; 4. $40\frac{1}{2}$; 5. -100000; 6. 218.88; 7. 0.01; 8. -0.004; 9. 4; 10. -10。

习题 1·14 1. 3874000; 2. -6; 3. 0; 4. 19; 5. -3700000; 6. 74; 7. -20600; 8. -43。

习题 1·15 15. $-\frac{9}{110}$; 16. $-3\frac{1}{3}$; 17. -2; 18. $-\frac{1}{6}$; 19. $\frac{11}{100}$; 20. $-1\frac{1}{20}$。

习题 1·17 1 3401; 2. 8; 3. 375; 4. -61; 5. 100; 6. $-27\frac{4}{5}$。

习题 1·20 1. 14; 2. $\frac{1}{4}$; 3. 9; 4. $\frac{1}{2}$; 5. $-4\frac{1}{3}$; 6. -3; 7. -16; 8. $-7\frac{8}{45}$; 9. $-3\frac{1}{2}$; 10。-24。

复 习 题 一

17. -2500; 18. 781; 19. 600; 20. 3; 21. -75; 22. -1; 23. $-4\frac{5}{6}$; 24. 21; 25. $6\frac{9}{16}$; 26. $-29\frac{7}{12}$; 27. $-\frac{47}{48}$; 28. $-\frac{1}{4}$; 29. -16; 30. -0.0431; 31. 1; 32. 0; 33. $-6\frac{17}{18}$; 34. -10125; 35. 483; 36 $2\frac{3}{7}$。

第 二 章

习题 2·3 1. (2) $a+10$, (3) $\frac{1}{5}a$, (4) $a+\frac{1}{5}$; (下略) 6. $\frac{x}{5x-3}$, $\frac{x-1}{5x-3-1}$; 7. $\frac{x}{x^2-6}$, $\frac{x^2-6}{x}$; 8. $\frac{-x+6+3}{x^2}$; 9. (1) $2a$, (2) ab, (3) $\frac{50}{a}$, (4) $\frac{d}{a}$; 10. (1) $3a-3b$(公里),

(2) $2b+3a$(公里), (3) $\frac{d}{b}-\frac{d}{a}$(小时); 11. (1) a^2, (2) $4a$; 12. (1) a^2+b^2 平方厘米, (2) a^2-b^2 平方厘米, (3) $4a+4b$ 厘米, (4) $4a-4b$ 厘米.

习题 2·4 3. (1) 8, (2) -0.008, (3) $2\frac{2}{63}$, (4) $\frac{1}{18}$; 4.(1) -2, (2) 26, (3) 5.107, (4) $19\frac{5}{27}$; 5. (1) -16, (2) 6, (3) -0.36, (4) $-5\frac{17}{144}$; 6. (1) 4, (2) 0.64, (3) $84\frac{1}{36}$, (4) $1\frac{781}{900}$; 7. (1) $1\frac{12}{13}$, (2) $\frac{1}{13}$, (3) $\frac{1}{25}$, (4) $\frac{1}{181}$; 8. (1) $\frac{21}{31}$, (2) $\frac{21}{31}$, (3) $1\frac{60}{79}$, (4) $\frac{79}{139}$; 11. (2) 1.62 平方厘米; 12. (2) 0.52 平方厘米.

复 习 题 二

9. (1) $\frac{1}{4}$, $-\frac{35}{36}$, (2) -37, -5.743; 10. (1) 4, 0, (2) 1, 1.69; 11. (1) 24, $4\frac{1}{6}$, (2) 3, $8\frac{1}{3}$; 12. (1) $-2\frac{11}{12}$, $-\frac{1}{12}$, (2) $\frac{7}{19}$, $\frac{7}{19}$; 13. 4; 14. $27\frac{1}{12}$; 15. 2; 16. 486; 17. (1) 10, (2) 0.1; 18. $(x+y)^2-(x^2+y^2)$; 19. $\frac{xy}{x+y}$; 20. $x(26-x)$; 21. $x+\frac{48}{x}$; 22. $x(25-x)$; 23. $\pi x^2+\pi(15-x)^2$; 24. $2\pi x+2\pi\cdot 3x$; 25. $\frac{(x+2x)(x-3)}{2}$; 26. 当 $a>0$ 时、$-a$ 是负数, 当 $a=0$ 时、$-a=0$, 当 $a<0$ 时、$-a$ 是正数; 27. 当 $b>0$ 时、$a+b>a$, $b=0$ 时、$a+b=a$, $b<0$ 时、$a+b<a$; 28. $b>0$ 时、$a-b<a$, $b=0$ 时、$a-b=a$, $b<0$ 时、$a-b>a$; 29. $a>0$ 时、$3a>a$, $a=0$ 时、$3a=a$, $a<0$ 时、$3a<a$; 30. $a>0$ 时、$\frac{a}{3}<a$, $a=0$ 时、

$\frac{a}{3}=a$, $a<0$ 时、$\frac{a}{3}>a$； 31. a 是正数或零； 32. a 是负数； 33. $a=b$ 或 $a=-b$，即 a 与 b 可能相等，可能是相反的数； 34. $a>0$ 时、$a>b$，$a<0$ 时、$a<b$，a 不会等于 b、a 不会等于 0。

第 三 章

习题 3·3 5. (1) 0.525, (2) 7.111.

习题 3·4(1) 4. (1) $-9a$, (2) 0, (3) $-18a^2b^3-14a^3b^2$, (4) $-5a^2x^3+2a^3x^2$, (5) $7abx^2-4ab^2x-3a^2bx$, (6) $-3a^2x^2y^3+5a^2x^3y^3-3a^3x^2y^2$; 5. (1) $-40a$, (2) $\frac{13}{60}ab$, (3) $-\frac{5}{6}x^2y-\frac{5}{12}xy^2$, (4) $10a^3x^2-6a^2x^3$, (5) $-\frac{3}{4}abx^2-\frac{1}{3}abx-\frac{1}{3}ab^2x$, (6) $-5a^2b^3xy-11a^3b^2xy$.

习题 3·4(2) 3. (1) $11a$, (2) $-4a^2$, (3) $-a^2b$, (4) 0, (5) $-5a^3-3a^2+3a$, (6) $8ab-7ac$; 4. (1) $5a$, (2) $6a$, (3) $5a^2$, (4) $\frac{13}{12}a^2b^3$; 5. (1) $2x^2y-2xy^2$, (2) $-14y^2-9y$.

习题 3·4(3) 1. (1) $3x^3-3x^2+14$, (2) $-4a^3+7a^2-5a+2$, (3) $10a^2-ab$, (4) $\frac{19}{12}x^2-\frac{11}{12}xy-2y^2$;

2. (1) $-2a^4-10a^2+5a-6$, (2) $-a^2-4\frac{2}{3}b^2+\frac{1}{4}c^2$, (3) $2x^4-3.73x^3y+2.7x^2y^2+3.46xy^3+2.4y^4$, (4) 0; 3. (1) $4a-3b$, (2) $4a+4b$, (3) $6a^2$, (4) $-10ab+12b^2$, (5) $2bx+2ay$, (6) $-x^3-10x^2y+3xy^2+y^3$; 4. (1) $6a+2b$, (2) $2a^3-10a^2+8a-20$, (3) $-3x^3+x^2+12x-14$, (4) $-12x^2y-2y^3$.

习题 3·4(4) 1. $8x^4+2x^3+6x^2+7x-14$; 2. $-14x^3-2x^2+8x+7$; 3. $4x^4-x^3-3x-9$; 4. $-3a^2+ab+7b^2$; 5. $-2xy$; 6. $\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{2}xy$; 7. $\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+x-5\frac{2}{3}$; 8. $2a^4+12a^2b^2+2b^4$;

9. $-a^3-0.2a$; 10. $\frac{1}{30}a^2-\frac{1}{15}b^2$; 11. $4y-6z$; 12. $5x^3-x-23$;
13. $12x^7+3x^6-8x^5+2x^4-11x^3-3x^2$; 14. $-2ab+4b^2$;
15. $6x^3+2x^2+x+11$; 16. $a^3+a^2b+6ab^2+b^3$; 17. $3a^2b-3ab^2$;
18. $\frac{29}{30}a^3+\frac{1}{10}a^2-\frac{3}{4}a+\frac{19}{18}$.

习题 3·5(1) 1. $2a+4b-2c$; 2. $10x-5y-3z$; 3. $12xy-3y^2$;
4 $10a-5b$; 5. $-a+5b+2c$; 6. $-2x-5y+4z$;
7. $2a-3c+x+2y$; 8. $2a^3-3a^2-5a+5$; 9. $13x-36y$;
10. $x-y+3z$; 11. $14x-20y$; 12. $-4x^3+8x^2-4x-12$.

习题 3·5(2) 3. $-2a+(3b+5c)$; 4. $3x-(6y+5z)$;
5. $-2a+(3b-5c)$; 6. $-2a-(3b+5c)$; 7. $x^2-(3x+5)$;
8. $x^2+(3x-5)$; 9. $a^3-(3a^2b+b^3)$; 10. $a^3+(3a^2b+b^3)$.

习题 3·6(1) 1. x^{15}; 2. x^4; 3. x^{28}; 4. x^8; 5. x^{a+b+c};
6. x^{a+1}; 7. x^{2a}; 8. x^{3a+1}; 9. a^{4n+2}; 10. x^{a+2b+1}.

习题 3·6(2) 15. $-9x^{a+1}$; 16. $72x^n$; 17. $4(a-b)^6$;
18. $-75\cdot10^{15}$.

习题 3·6(3) 11. $-2a^4b^2-\frac{4}{3}a^3b^3+\frac{4}{5}a^2b^4$;
12. $4x^{m+1}y^2-8x^{n+1}y^2+24x^{2n+1}y^2$; 13. $-7x^{2a}y^{2b}z^{2c}+9x^{a+1}y^{b+1}z^{c+1}$;
14. $5x-3y+9z$; 15. $4x^2-6xy-2y^2$; 16. $2a^3-4ab^2+2b^3$;
17. $x-\frac{7}{6}$; 18. $-19x+18$.

习题 3·6(4) 25. $6a^4-10a^3-13a^2+35a-28$;
26. $2x^4+3x^3+3x^2+12x-20$; 27. $x^3+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{12}x-\frac{1}{12}$;
28. $x^3-0.5x^2-0.44x+0.1$; 29. $\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{4}x^3-17x^2-\frac{5}{2}x+20$;
30. $\frac{1}{6}x^4-\frac{5}{2}x^3-2\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{3}x+\frac{4}{3}$.

习题 3·6(5) 6. $3x^5-14x^4+11x^3+11x^2+13x-30$;
7. $2x^6+19x^5+51x^4+34x^3-35x^2-23x+12$;
8. $4x^6-5x^5+8x^4-10x^3-8x^2-5x-4$; 9. $x^4+3x^3-x^2+2x+15$;
10. $5x^7-12x^5+19x^4-13x^3+15x^2+8x-16$;

15. $a^5-2a^4b+2a^3b^2-2a^2b^3+ab^4-b^5$;

16. $24a^9b-26a^5b^5+4a^4b^6-6a^3b^7-5a^2b^8+4ab^9-3b^{10}$; 17. x^6-y^6;

18. $\frac{4}{5}a^6-\frac{3}{20}a^5-\frac{2}{5}a^4+\frac{67}{360}a^3-\frac{1}{12}a^2+\frac{1}{6}a-\frac{5}{27}$;

19. $x^3+3xy+y^3-1$; 20. $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

习题 3·7(1) 1. x^4; 2. a^8; 3. x^4; 4. a^6; 5. a^{36};
6. a^{15}; 7. b^{12}; 8. b^7; 9. y^{25}; 10. y^{10}; 11. a^{2mn};
12. a^{2m+n}; 13. a^{m+2}; 14. a^{2m}; 15. a^{320}; 16. a^{36}; 17. a^{24};
18. a^9; 19. a^{mnp}; 20. a^{m+n+p}; 21. a^{16}; 22. a^{20};
23. a^{2m+3n}; 24. x^{2m+3n}; 25. a^{11}; 26. a^{25}; 27. $2a^5$;
28. $2a^6$; 29. a^6+a^5; 30. a^5+a^6.

习题 3·7(2) 1. $81a^8b^{12}$; 2. $16a^{20}b^{12}c^4$; 3. $-a^{101}b^{202}c^{303}$;
4. $\frac{1}{8}x^6y^3$; 5. $-\frac{8}{27}a^9b^3c^6$; 6. $\frac{81}{16}a^8x^4$; 7. $0.027a^6$;
8. $81a^8b^{12}x^4y^4$; 9. $4a^4b^8x^2y^6$; 10. $x^{2m}y^m$; 11. $x^{2m}y^2$;
12. $x^{2m}y^{2n}$; 13. $x^{mn}y^n$; 14. $72a^{12}$; 15. $x^{14}y^{28}$; 16. $-a^{27}b^{28}$;
17. $-2a^{12}$; 18. $-a^{18}b^{20}c^3$; 19. $324a^9b^{11}$; 20. $a^{3m+2n}b^{2m+3n}c^{2m+3}$;
21. $10a^6$; 22. $28a^9$; 23. $a^{36}+a^{12}$; 24. $25a^{10}+27a^9$.

习题 3·8(1) 1. a^5; 2. b; 3. a^{15}; 4. x^{90}; 5. x;
6. x^{m+n}; 7. a^9; 8. a^{10}; 9. b; 10. x^2; 11. a^6; 12. a^8;
13. 1; 14. x^m; 15. x^{m+n}; 16. x^{2m+5n}; 17. a^{15}; 18. a^{13};
19. 1; 20. x^{2m+10}.

习题 3·8(2) 10. $-6a^m$; 11. $9a^5$; 12. $-27a^3b^3c^3$; 13. $18a^3b^5$;
14. $12a^4b^4$; 15. 9; 16. $8a^{m+2}$; 17. $-3a^nb^n$; 18. $2x^9$;
19. $\frac{32}{27}a^4b^5$; 20. $0.04a^2$.

习题 3·8(3) 5. $-30a^2b+40ab^2c-20bc^2$;
6. $-\frac{3}{4}a^2x^2+\frac{1}{2}ax^3+\frac{9}{8}x^4$; 7. $\frac{1}{3}a^4-a^2+3a$;
8. $-a^{m+2}b^{n+2}+3a^{m+1}b^n$.

习题 3·8(4) 5. x^2+x+2; 6. x^2-2x+2; 7. $6a^2-7a+8$;
8. $-10x^3+8x^2-6x+4$.

习题 3·8(5) 6. $a^2+2ab+3b^2$; 7. $a^4-2a^3b+4a^2b^2-8ab^3+16b^4$;

8. $-a^2+3ab-5b^2$; 9. $a+b+c$; 10. $a-b-c$.

习题 3·9 5. $2x-9$ 余 $31x+17$; 6. x^2-x+5 余 $x+15$.

习题 3·10(2) 1. $16a^4-b^6$; 2. $9a^4b^2-25x^4$; 3. $9a^2-4b^2$; 4. $9a^2-25b^4$; 5. $4a^6-9b^4$; 6. $25x^6-36y^4$; 7 y^2-x^2; 8. $169b^2-144a^2$; 9. $9y^6-25x^4$; 10. $9b^4-49a^6$; 11. 9991; 12. 39999; 13. 6375; 14. 884; 15. 999975; 16. 0.9996; 17. x^4-y^4; 18. a^4-1; 19. a^8-b^8; 20. $81a^4-16b^4$; 21. a^8-b^4; 22. $x^{16}-y^{16}$; 23. $a^2+ab-2b^2$; 24. $9a^4+9a^2b-4b^2$; 25. $6a^2+5ab-6b^2$; 26. $a^4-a^2b^2-2b^4$; 27. $a^2+ab-ac-bc$; 28. b^4-9a^4; 29. x^4-3x^2-54; 30. a^4-b^4.

习题 3·10(4) 1. $a^2-2ab-2ac+b^2+2bc+c^2$;

2. $4a^2+12ab+4ac+9b^2+6bc+c^2$;

3. $9a^2-12ab+24ac+4b^2-16bc+16c^2$;

4. $25a^2+10ab-20ac+b^2-4bc+4c^2$; 5. $4a^2+12ab+9b^2-16c^2$;

6. $25a^2-30ab+9b^2-16c^2$; 7. $a^2-4b^2+12bc-9c^2$;

8. $49a^2-70ac+25c^2-9b^2$; 9. $4a^2+12ac+9c^2-25b^2$;

10. $a^4-b^4+2b^2c^2-c^4$; 11. $9a^4-30a^2b^2+25b^4-4c^4$;

12. $9x^4-13x^2+4$; 14. $-24xy$; 15. $2a^2-2b^2$; 16. $18a^2-12ab$; 17. $4ab+4ac$; 18. $8ab-24ac$; 19. $4ab+8b^2-12bc$; 20. $24xy$.

习题 3·10(6) 1. a^6-1; 2. $64a^6-b^6$; 3. x^6-y^6; 4. $64a^{12}-729b^{12}$; 5. a^9-1; 6. x^9+y^9; 7. $9x^3$; 8. $2y^3$; 9. 0; 10. $-2x^3y^3$.

习题 3·10(7) 7. $27x^6-54x^5+36x^4-8x^3$;

8. $125x^9+150x^6a+60x^3a^2+8a^3$;

9. $\frac{1}{8}a^3x^3-\frac{1}{4}a^2bx^2+\frac{1}{6}ab^2x-\frac{1}{27}b^3$;

10. $\frac{1}{27}a^9-\frac{1}{6}a^7+\frac{1}{4}a^5-\frac{1}{8}a^3$.

习题 3·10(8)

1. $a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$;

2. $a^3-6a^2b-3a^2c+12ab^2+12abc+3ac^2-8b^3-12b^2c-6bc^2-c^3$;

7. $2a^3+6ab^2$; 8. $6a^2b+2b^3$; 9. $72a^2b+54b^3$;

10. $-12x^4y^2-16y^6$.

习题 3·10(10) 31. $a^2+2ab+b^2+3a+3b-28$;

32. $x^2-2xy+y^2-7x+7y+12$; 33. $3a^2+6ab+3b^2-13a-13b-10$;

34. $10a^2-20ab+10b^2+27a-27b-28$.

复 习 题 三

8. $8a^3-2a^2b-2ab^2$; 9. $-4x^3-3x^2-7x+4$; 10. $26a^3b^2$;

11. $-6bc^3+5ac^4-4a^2b^2c^6$; 12. $-2a^2-a^4$;

13. $2x^5+x^4-7x^3+8x^2+5x-15$; 14. $x^3+4x^2y+5xy^2+2y^3$;

15. x^3-3x^2+2; 16. $a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$; 17. x^3-4x^2+8x;

18. $-6x^4+12x^3+9x^2+15x$; 19. $2x$; 20. $-20x+27$; 21. $-6x$;

22. $-10a+24b$; 23. $8x+11$; 24. $-5a+5b+9c$;

25. $-4x+2y-2z$; 26 $a^{18}+a^{16}$; 27. $-3a^4b^5$;

28. $a^{16}b^7+a^8b^6$; 29. $x^{12}y^9-x^3y^2$; 30. $2a^8$; 31. a^{3m+n+3};

32 a^{n+5}; 33. a^{mn-m}; 34. a^n; 35. $a^{2m}+5a^m+6$; 36. a^m+2;

37 $a^{2m}-2a^m+1$; 38. $a^{4m}-a^{2m}-2a^m-1$; 39. $2x^2-24x+18$;

40 $-9x^2-12y^2$; 41. $-a^2+4b^2+9c^2+12bc-8ab+12ac$;

42. $54x^2y-36xy^2$; 43. $-3a^2b-4ab^2-b^3$; 44. $16x$;

45. $-2x^2+9xy-2y^2$; 46. $47x+11$; 47. $18a^2b+54b^3$, -19;

48. $-16b^3$, 54; 49. $-15x^4-10x^2+80$;

50. $-63x^6+36x^4y^2+36x^2y^4-63y^6$.

第 四 章

习题 4·2(2) 1. $(x+y)(a+b+c)$; 2. $(x-y)(a-b-c)$;

3 $(a+b+c)(x-2y)$; 4. $(a+2b-3c)(x+1)$;

5. $(x+1)(3x-2)$; 6. $(x-3)^2(x-4)$; 7. $(a-b)^2$;

8 $ab(x-y)(a+1)$; 9. $(3x-y)(4x+3y)$;

10. $(x-a)(x^2-2ax+a^2-a)$; 11. $a(x-2a)^2(ax-2a^2-1)$;

12. $(a-b)(x-y)(x-2y-a-b)$; 13 $(a-3)(a^3+a^2+6)$;

14. $(a-3)(a^3+a^2-5)$; 15. $(b+c-d)(x-y)$;

16. $(a-2b+3c)(5x+y)$; 17. $(x+2)(x-3)(x^2-x-10)$;
18. $(x+1)(2x-3)(3x-1)$; 19. $(3x-2)(5x^2-10x+4)$;
20. $(a-b)^2(a+b)^2(a+b-1)$.

习题 4·3 1. $(b+c+2)(a+x)$; 2. $(x-y+a)(a+b)$;
3. $(1+x)(ax-b)$; 4. $(x-y)(a-b)$; 5. $(x^2+y^2)(a+b)$;
6. $(a+1)(b+1)$; 7. $(b-1)(a-1)$; 8. $(b-1)(a+1)$;
9. $(a-1)(b+1)$; 10. $(x-3y)(x+y)$; 11. $(x+2y-3a)(2x-1)$;
12. $(x+1)(x^4+1)$; 13. $(x-1)(x^4+1)$; 14. $a(x-1)(x^4+1)$;
15. $(x-1)(ax^4+1)$; 16. $a^2(x-1)(x^4+1)$.

习题 4·4(1) 9. $(2x-3y+2a)(2x-3y-2a)$;
10. $(a+2b+x-3y)(a+2b-x+3y)$; 11. $3(7a-b)(3b-a)$;
12. $(a^2+2ab+3x+3y)(a^2+2ab-3x-3y)$; 13. $(a+c)(2b-a-c)$;
14. $(3a+b)(b-a)$; 15. $(3x-4y+5z)(-x+2y-3z)$;
16. $(5x-y-z)(-x+5y+5z)$.

习题 4·4(2) 1. $(a^2+x^2y^2)(a+xy)(a-xy)$;
2. $(a^4b^4+1)(a^2b^2+1)(ab+1)(ab-1)$; 3. $(a^2+4)(a+2)(a-2)$;
4. $(4a^2b^4+c^4)(2ab^2+c^2)(2ab^2-c^2)$; 5. $a(a^4+b)(a^4-b)$;
6. $a^2b(b+2)(b-2)$; 7. $(x-y)(x+y+1)$; 8. $(x+y)(x-y-1)$;
9. $(x+y)(x-y+1)$; 10. $(x-y)(x+y-1)$;
11. $(a+2b)(a-2b-1)$; 12. $(a-2b)(a+2b-2)$;
13. $(a+2b)(a^2-2ab-1)$; 14. $(x+y)(5x-5y+1)$;
15. $(x+y)(3x-3y-1)$; 16. $(x-y)(2x+2y-1)$;
17. $(a-b)(a+b+1)$; 18. $(a+b)(a-b+1)$;
19. $(a-b)(a^2+ab+1)$; 20. $a(a+b)(a-b-1)$.

习题 4·4(3) 1. $(x-6)^2$; 2. $(x+4)^2$; 3. $(2a-5b)^2$;
4. $(3x+2y)^2$; 5. $(y-25x)^2$; 6. $(x-19)^2$; 7. $(3xy^2+5z)^2$;
8. $(x^3+12)^2$; 9. $(1-3ab^3)^2$; 10. $(7a-8b^2)^2$; 11. 9;
12. 20; 13. $48x^2y$; 14. $4d^4$; 15. $a(a-2b)^2$; 16. $x^2(a^2+2y)^2$;
17. $b^3(4ab-c^2)^2$; 18. $(3a-3b+1)^2$; 19. $(a+2b-5)^2$;
20. $(a+b)^2(2x-3y)^2$.

习题 4·4(4) 1. $(x+y+3a)(x+y-3a)$;

2. $(2x+a+3)(2x-a-3)$; 3. $(x+2a+b)(x+2a-b)$;
4. $(3a+x-2)(3a-x+2)$; 5. $(1+x-y)(1-x+y)$;
6. $(a^2+x-2a)(a^2-x+2a)$; 7. $(a-y+b-x)(a-y-b+x)$;
8. $(a+b-1)^2$; 9. $(a-b)(3a-3b-5)$;
10. $(a-2b)(a-2b-a^2-2ab)$.

习题 4·4(5) 5. $(a^4+b^4)(a^8-a^4b^4+b^8)$;
6. $(4a-1)(16a^2+4a+1)$;
7. $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}xy+\frac{1}{9}y^2\right)$;
8. $(x+y+2)(x^2+2xy+y^2-2x-2y+4)$;
9. $(7m-5n^2)(49m^2+35mn^2+25n^4)$;
10. $(1-2a-2b)(1+2a+2b+4a^2+8ab+4b^2)$.

习题 4·4(6) 1. $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$;
2. $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
3. $(x+y)(x^2-xy+y^2+6)$; 4. $(x-y)(x^2+xy+y^2-x+y)$;
5. $(x-y)(x^2+xy+y^2-x-y-1)$;
6. $(a-b)(a^2+ab+b^2-a+b-1)$; 7. $(a+b)(a^2-ab+b^2+a+b)$;
8. $(a+b)(a^2-ab+b^2+a-b+1)$; 9. $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2+2)$;
10. $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4+1)$.

习题 4·4(7) 1. $(2a-b)^3$; 2. $(3x+2y)^3$; 3. $(3x-4y)^3$;
4. $(1+4x^2y^2)^3$; 5. $(x^2-2y)^3$; 6. $\left(3x-\frac{1}{3}y\right)^3$; 7. $a(a-1)^3$;
8. $(1-x+y)^3$; 9. $(x+y)^3(x-y)^3$; 10. $(1+2ab)^3(1-2ab)^3$.

习题 4·5(1) 17. $a(a-2b)(a-22b)$; 18. $a^2(a+3b)(a+6b)$;
19. $(a^2-8)(a+1)(a-1)$; 20. $(a+1)(a^2-a+1)(a+2)(a^2-2a+4)$.

习题 4·5(2) 10. $(a-13b)(a+4b)$; 11. $(a^2+8b^2)(a^2-7b^2)$;
12. $(xy+11)(xy-4)$; 13. $(a-10)(a-6)$; 14. $(a-12)(a+5)$;
15. $(a+30)(a+2)$; 16. $(a+15)(a-4)$; 17. $(x-12y)(x-8y)$;
18. $(x-12y)(x+8y)$; 19. $(x+16y)(x-6y)$;
20. $(x+4y)(x+24y)$.

习题 4·6 1. $3(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$;
2. $y^3(2x+y^2)(4x^2-2xy^2+y^4)(2x-y^2)(4x^2+2xy^2+y^4)$;

3. $(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$;　4. $(2y+5)(3x-2)$;
5. $3(x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$;　6. $(x+a)(x+a-b)$;
7. $-(x-7)(x+6)$;　8. $a(a^2+9b^2)(a+3b)(a-3b)$;
9. $(x+3)(x-3)(x+2)(x^2-2x+4)$;　10. $(x+4)(x-4)(x+2)(x-2)$;
11. $(x+y)(x-y)(x+3y)(x-3y)$;　12. $(a+3bc)^2(a-3bc)^2$;
13. $(x-a)(x+b)(x-b)$;　14. $(a+3b-2c)(a-3b+2c)$;
15. $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6)$;　16. $(a+b)(a-b+1)$;
17. $(2+2b+a)(2-2b-a)$;　18. $(x-7)(x+2)(x-2)$;
19. $(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)$;
20. $(bx+a)(ax+b)$.

习题 4·8　1. $13a^3b^2$, $156a^5b^4c^2d^2$;　2. b, $a^5b^7c(a+b)(a-b)$;
3. $(x-y)(y-z)(x+z)$,　$(x-y)(y-z)(x+z)$;
4、$x-1$,　$(x-1)(x-2)(x-3)(x+2)$;
5. $(x+y)(x-y)$,　$(x+y)^2(x-y)^2$;
6. $a+b$,　$(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2(a^2+b^2)(a-b)$.

复 习 题 四

15. $a^2(a+b)(a-b)$; 16. $x(m-n)(ax-3)$; 17. $3b(c-d)(a+3b)$;
18. $(x+y)(x-y)^2$;　19. $x(x+1)^2(x^2-x+1)$;　20. $(x-1)(a+1)$;
21. $(x-1)(b-1)$;　22. $(x+1)(a-b)$;　23. $(x-y)(a+b-c)$;
24. $3(xy-4)(xy+1)$;　25. $(a-b)(a+b-1)$;
26. $(a+2b+3c)(a+2b-3c)$;　27. $(a+b)(a+b-4)$;
28. $c(a^2+c^2)(a+c)(a-c)$;　29. $(a+x)(a-x-b)$;
30. $(x^2+15)(x+3)(x-3)$;　31. $x(x-8)(x+3)$;
32. $(ax-1)(a^3x^3-ax-1)$;　33. $(a-b)(5a+5b-3)$;
34. $(2+x)(2-x+x^3)$;　35. $b(a^4+b^4)(a^8-a^4b^4+b^8)$;
36. $(a+b)(a+b+2c)$;　37. $a(a-b)(2a+3b)$;
38. $(x+y-z)(x-y+z)(x+y+z)(x-y-z)$;
39. $(x+y-3)(x+y+2)$;
40. $(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$;
41. $(a+x+b+y)(a+x-b-y)$;

42. $(x^2-3y^2)(x^4+3x^2y^2+9y^4-x^2-3y^2)$;

43. $(x^4+y^4)(x^8-x^4y^4+y^8)(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)(x+y)(x^2-xy+y^2)$
$\times(x-y)(x^2+xy+y^2)$; 44. $(x-1)(x+2)(x^2-2x+4)$;

45. 707; 46. 324; 47. 1.72; 48. 315.6; 49. 10.2;

50. -24; 51. $a^4-2a^2b^2+b^4$; 52. $a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$;

53. $12a^2b+16b^3$; 54. $-12a^2b^2$; 55. $2b^6$; 56. $7\frac{1}{5}$;

57. 25; 58. -1000; 59. -0.0003; 60. 0;

61. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$; 62. $(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)$;

63. $(x^2+xy+3y^2)(x^2-xy+3y^2)$; 64. $(2a^2+2ab-5b^2)(2a^2-2ab-5b^2)$;

65. $(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)$.

第 五 章

习题 5·1 2. (1) $a\neq 5$, (2) $a\neq -4$, (3) $x\neq 3$, (4) $x\neq 0$;
7. (1) 0, (2) 0, (3) 6, (4) $1\frac{1}{3}$; 8. (1) 0, (2) $-\frac{1}{6}$;
9. (1) 25, (2) 0; 10. (1) 3, (2) 0; 11. (1) 1,
(2) $1\frac{3}{5}$; 12. (1) $1\frac{2}{23}$, (2) $\frac{89}{104}$.

习题 5·3 5. $\frac{x-12}{x-3}$; 6. $\frac{x^2-x+1}{x^2-x-3}$; 7. $-\frac{x^2-x-1}{x-5}$;
8. $-\frac{x^2+x-3}{x^2-2x+1}$; 9. $-\frac{x-7}{x^2+x-5}$; 10. $\frac{3x^3-2x^2+x+1}{3x^3-2x^2+x-1}$.

习题 5·4(1) 1. a^8; 2. $\frac{1}{a^3}$; 3. $\frac{1}{x^{12}}$; 4. 1; 5. -1;
6. 1; 7. $\frac{1}{a^8}$; 8. $\frac{1}{a^{18}}$; 9. a^4; 10. $\frac{1}{a^5}$; 11. a^m; 12. $\frac{1}{a^n}$;
13. $\frac{1}{a^n}$; 14. $\frac{1}{a^{3m+n}}$; 15. $\frac{1}{a^{2n}}$; 16. $a^{2m+2n-2}$.

习题 5·4(2) 6. $\frac{1}{a^8b}$; 7. $\frac{-1}{18aby^5}$; 8. $\frac{-a^2b^{13}}{x^{10}y^2}$; 9. $\frac{ab^2}{10}$;
10. $\frac{1}{3a^{m+1}b^{n+3}}$.

习题 5·4(3)　11. $\frac{a^2+1}{a}$;　12. $\frac{x+y}{x-y}$;　13. $\frac{a-b}{a^2}$;

14. $\frac{a^2+b^2}{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}$;　15. $\frac{a+b+c+d}{a-b+c+d}$;

16. $\frac{(x-y+z)^2}{(y+z+x)(y+z-x)}$;　17. $\frac{1}{x-1}$,　(1) $\frac{1}{30}$,　(2) $-\frac{1}{50}$;

18. $\frac{x-1}{x-3}$,　(1) $\frac{4}{5}$,　(2) 21;　19 $-\frac{1}{a}$;　20. -1;

21. $\frac{(a+b)^3}{(a-b)^3}$;　22. $\frac{1}{a-b}$;　23. $\frac{1}{a^2+ab+b^2}$;　24. $-(a+b)^2$;

25. $-(a^2+ab+b^2)^3$;　26. $-\frac{x+y}{x-6y}$;　27. $-\frac{(a+2)(a+3)}{(a-2)(a-3)}$;

28. $-\frac{a+c}{a-c}$;　29. $\frac{(b+c)^2}{(b-c)^2}$;　30. $\frac{-1}{a+b}$.

习题 5·6(1)　6. x;　7. 1;　8. 0;　9. 0;　10. 0。

习题 5·6(2)　1. $\frac{18x+7}{12x^2}$;　2. $\frac{-3a^2+8ab+5b^2}{15a^2b^2}$;

3. $\frac{-8x^2y^2-4xy-7x^2+11y^2}{x^3y^3}$;　4. $\frac{4}{(x-7)(x-3)}$;

5. $\frac{2x}{(1+x)(1-x)}$;　6. $\frac{2x^3}{(1+x+x^2)(1-x+x^2)}$;　7. $\frac{ab}{a^2+ab+b^2}$;

8. $\frac{-(a^2+3ab)}{(a+b)(a-b)^2}$;　9. $\frac{-6}{(x-3)(x-2)(x-4)}$;

10. $\frac{a-12}{(a+3)(a+4)(a-2)}$;　11. $\frac{-(x-3)}{(x-1)(x+1)}$;

12. $\frac{2x^3-x^2y+xy^2-y^3}{y(x+y)(x-y)}$。

习题 5·6(3)　1. $-\frac{x+z}{xz}$;　2. $\frac{x^2+xy+y^2}{y(x+y)}$;　3. 0;　4. 0;

5. $\frac{b+c-3a}{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}$;　6. $\frac{b^2-c^2+ac-ab}{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)}$;

7. $\frac{1}{x+2}$;　8. 0;　9. 0;　10. 0。

习题 5·6(4)　9. $x+2+\frac{3}{x-1}$;　10. $a+1+\frac{1}{a-1}$;

11. $2x+1-\frac{5}{x+1}$;　12. $x-1+\frac{3x-3}{x^2+x-2}$。

习题 5·7(1) 17. 1; 18. $\frac{1}{(a^2+b^2)^2}$; 19. $\frac{x^2-y^2}{y^2}$;

20. $-\frac{x+1}{x}$; 21. $-\frac{a-3}{a+4}$; 22. $-\frac{(x+1)(x-7)}{(x+5)(x-4)}$; 23. -1;

24. $\frac{a^2-ab+b^2}{(a^3-b^3)(a-b)}$.

习题 5·7(2) 1. $\frac{2a-2b}{a}$; 2. x; 3. $3-x^2$; 4. 1; 5. 0;

6. -1; 7. 5; 8. 4; 9. 0; 10. $\frac{a}{a+b}$.

习题 5·8 7. $-\frac{(a+b)^6}{(a-b)^3}$; 8. $-\frac{25(x+y)}{8x^6y}$; 9. 4;

10. $\frac{x-y}{x}$.

习题 5·9(1) 7. $\frac{a+x}{a}$; 8. $-\frac{12a(x+y)}{5x^3y}$;

9. $\frac{(a+4)(a-1)}{5(a+2)(a+1)}$; 10. 1.

习题 5·9(2) 6. 0; 7. $\frac{m^2-n^2+2mn}{m+n}$; 8. $\frac{2x}{x-y}$; 9. $a-b$;

10. $\frac{x^2-a^2}{ax+bx+cx-bc}$.

习题 5·10 1. $\frac{a+1}{a-1}$; 2. $c(1-c)$; 3. $\frac{ab}{a-b}$; 4. $3(a-x)$;

5. $-\frac{x+1}{x^2(x+3)}$; 6. $-\frac{x^3}{2x+1}$; 7. $\frac{x-4}{x-5}$; 8. $\frac{a^2-a+1}{2a-1}$;

9. y; 10. $\frac{1+x^2}{1+x}$.

复 习 题 五

11. $\frac{1}{5}$; 12. $1\frac{1}{15}$; 13. $-\frac{2}{9}$; 14. $-\frac{1}{3}$; 15. 0; 16. 0;

17. $-2\frac{1}{25}$; 18. $7\frac{4}{5}$; 19. $-\frac{1}{4}$; 20. 1; 21. $\frac{1}{2}$;

22. $-1\frac{2}{13}$; 23. $x\neq0$; 24. $x\neq2$; 25. $x\neq-3$; 26. $x\neq3$;

27. $xy(x+2y)$; 28. $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$; 29. $\frac{x+3}{x+9}$; 30. $\frac{3(x-3b)}{2(x+3b)}$;

31. $\frac{x^2-25}{(x+3)(x-2)}$; 32. $\frac{x^2-2bx+c^2}{x^2+2bx-c^2}$; 33. $\frac{2}{2a+3b}$;

34. $\frac{x^3-x^2+2x-1}{(x+1)(x-1)(x^2-x+1)}$; 35. $\frac{3x^2-11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$;

36. $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$; 37. $\frac{x}{x-1}$; 38. $\frac{x+3}{(x+1)(x+4)}$; 39. $\frac{a+b}{a-b}$;

40. 1; 41. $\frac{adf+ae}{bdf+be+cf}$; 42. $(x+y-z)(x-y-z)$;

43. $1\frac{41}{151}$; 44. $\frac{1}{100}$; 45. 2; 46. $1\frac{9}{17}$; 47. $\frac{x+4}{(x+1)(x+2)}$;

48. x; 49. $\frac{1}{c(a-b-c)}$; 50. $\frac{12-3x}{7-4x}$;

51. $\frac{x+1}{(2y-x)(2x^2+y+2)}$; 52. $\frac{a+2}{a^{n+1}}$.

第 六 章

习题 6·2 11. 7; 12. 7.642; 13. $\frac{10001}{9999}$; 14. $\frac{9}{5}$.

习题 6·3 1. $-5b:3a$; 2. $-1:x^2$; 3. $(b-1):(b+1)$; 4. $(a-x+y):(a+x+y)$; 5. $(2a-2b):(b-a+c)$; 6. $(a^2-1):3a^2$, $\frac{1}{4}$; 7. $(a-2b):(a+b)$, 4.3; 8. $-x^3:1$, 0.008.

习题 6·6 11. $9\frac{3}{5}$; 12. $\frac{26}{45}$; 13. $11\frac{2}{3}$; 14. -1; 15. $\frac{b}{a}$; 16. $\frac{(a-b)^3}{a+b}$; 17. $(a^2-b^2)^2$; 18. $-(a+1)$; 19. a^2-1, $\frac{7}{9}$; 20. $\frac{3(a+b)}{a}$, $1\frac{1}{2}$.

习题 6·8 1. 7辆; 2. 2天; 3. 25天; 4. 200公里; 5. 每小时45公里; 6. $\frac{bc}{a}$公里; 7. 每小时$\frac{ab}{c}$公里; 8. $\frac{5}{6}b$小时; 9. (1) a与b是成正比例的量, (2) x与y不是成正比例的量;

10. (1) a与b是成反比例的量， (2) x与y不是成反比例的量；

11. $b_2=13\frac{1}{2}$， $b_3=-4\frac{1}{2}$， $a_4=\frac{80}{3}$， $a_5=-\frac{32}{9}$； 12. $b_2=6$， $b_3=-18$， $a_4=\frac{48}{5}$， $a_5=-72$； 13. $y_1=\frac{80b^2}{3}$， $y_2=\frac{5b(a+b)}{3a}$， $x_3=\frac{-48a^2}{5}$， $x_4=\frac{3a(a+b)}{5b}$； 14. $y_1=\frac{15a^2b^2(a^2-b^2)}{16}$， $y_2=15a^3b^3(a-b)$， $x_3=-\frac{15a^2b^2(a^2-b^2)}{16}$， $x_4=15a^3b^3(a-b)$。

复习题六

9. $\frac{x-y}{xy}$； 10. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$； 11. $\frac{a+b-c}{a-b-c}$；

12. $\frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(x-2)^3}$； 13. $10b^2$； 14. $\frac{(a-b)^3}{a^2-ab+b^2}$；

15. a^2-1； 16. $a^{12}b^3$； 17. -36， 20； 18. -112， 84；

19. $\frac{(a^2-b^2)^2}{3a^2b}$； 20. $-3a^2b$。

总复习题

1. 5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15， 6、8、10、12、14， 5、7、9、11、13、15， 5、7、11、13； 2. 4、5、-4、-5， 4、5，-4、-5； 3. -2、-1、0、1、2， 1、2， -1、-2；

4. -3、-2、-1、0、1、2、3， 1、2、3， -1、-2、-3；

5. (1) -81， (2) $\frac{32}{243}$， (3) $+1$， (4) 0； 6. (1) -16， (2) $23\frac{1}{6}$； 7. (1) $5\frac{5}{6}$， (2) $-11\frac{11}{12}$；

8. (1) $10\frac{1}{3}$， (2) $-1\frac{1}{8}$； 9. (1) $-\frac{13}{15}$， (2) $-\frac{1}{3}$；

10. (1) $\frac{1}{36}$， (2) $69\frac{4}{9}$； 11. $1\frac{101}{180}$； 12. $-6\frac{1}{4}$； 13. -470；

14. 39.9; 15. $3\frac{11}{20}$; 16. $5\frac{23}{24}$; 17. $5\frac{5}{6}$, $5\frac{5}{6}$, 0;
18. 1.85, 8.79, 6.94; 19. $2\frac{5}{6}$, $7\frac{5}{6}$, 5; 20. 1.903, 8.393, 6.49; 21. $\frac{2}{3}$; 22. 0; 23. 21; 24. $3\frac{1}{4}$;
25. $3\frac{3}{4}$; 26. $\frac{2209}{225}$; 27. -8.6; 28. -4.7;
29. $-\frac{1}{2}<\frac{1}{3}<\frac{5}{2}$; 30. $-0.17<-\frac{1}{6}<5$; 31. $-4\frac{1}{3}$;
32. $-3\frac{1}{2}$; 33. 19; 34. $\frac{17}{54}$; 35. $-\frac{4}{5}x^ny^m$;
36. $2x^3y^nz^{n+1}$; 37. $-64a^{12}$; 38. $27a^3b^6c^9$; 39. $-x^{26}$;
40. $126a^3b^6c^9$; 41. $5x-13y+25z$;
42. $6x^4-6x^3y-7x^2y^2+17xy^3-6y^4$;
43. $-9a^5+3a^4b+35a^3b^2-43a^2b^3-24ab^4+30b^5$; 44. $3a^2+5a-7$;
45. $2x^2-3x-4$; 46. $x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6$;
47. $x^6+x^5y+x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+xy^5+y^6$;
48. (1) $-2x^3-5x^2-x+6$; (2) $15x^4-11x^3+20x^2-27x+7$;
49. (1) $a^2+4ab-6ac+4b^2-12bc+9c^2$, (2) $a^2-4b^2-12bc-9c^2$;
50. (1) $a^2-6ac+9c^2-4b^2$, (2) $9c^2-a^2+4ab-4b^2$;
51. (1) $a^2+2ac+c^2-4b^2+8bd-4d^2$,
(2) $a^2-b^2-4c^2-9d^2+4bc-6bd+12cd$;
52. (1) $81a^{20}-72a^{10}b^8+16b^{16}$, (2) $64x^{12}-432x^6y^9+729y^{18}$;
53. $a^{18}+3a^{12}b^9+3a^6b^{18}+b^{27}$; 54. $a^{32}-b^{32}$; 55. $2x^2-78$;
56. $18x+1$; 57. (1) 89996, (2) 255.64; 58. (1) 3588.01, (2) 252004; 59. $-15xy-3xz$, -15; 60. $-8x^3$, 64;
61. $(a+b)(a^2-ab+b^2+a-b)$;
62. $(x^2-3y^2)(x^4+3x^2y^2+9y^4-x^2-3y^2)$;
63. $(x-y)(z-x+y)$; 64. $(x-2y+z+1)(x-2y-z-1)$;
65. $(x+3)(x-3)(x^2+1)$; 66. $\frac{a-b-1}{a+b}$; 67. $\frac{9x+9y-3}{x^2+xy+y^2}$;
68. $\frac{1-x}{(1+x)^2}$; 69. $\frac{2(a-2)}{5a(a+1)}$; 70. $\frac{4x^2-3x+1}{x^2-x-3}$;

71. $\dfrac{2x-2}{x^2+x+1}$; 72. $\dfrac{-2a(2a-b)}{2a+b}$; 73. $\dfrac{m^2-n^2+2mn}{m+n}$;

74. $\dfrac{a}{a+b}$; 75. $\dfrac{2x}{x-y}$; 76. $a-b$; 77. $\dfrac{(a+b)^2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$;

78. $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2$; 79. $10a^2+a$;

80. $100(x^2-6)+10x+(x^2-4)=101x^2+10x-604$;

81. $|a+b|+|a|+|b|$; 82. $|a-b|+|a|+|b|$;

83. $\dfrac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}=\dfrac{a}{b}$; 84. $4a$; 85. $\left(\dfrac{a}{4}\right)^2=\dfrac{a^2}{16}$; 86. a^{2m+3n};

87. $a^{2m+2}b^{2n+4}$; 88. a^m; 89. a^n; 90. a; 91. $a^{2m}+2a^mb^n+b^{2n}$;

92. $a^{2m}-2a^mb^n+b^{2n}$; 93. $a^{2m}-b^{2n}$; 94. $a^{3m}-3a^{2m}b^n+3a^mb^{2n}-b^{3n}$;

95. $(a^m+1)^2$; 96. $(a^{2m}+b^{4n})(a^m+b^{2n})(a^m-b^{2n})$;

97. $(a^m+b^{2n})(a^{2m}-a^mb^{2n}+b^{4n})$; 98. $a^2(a^m-1)^2$;

99. $a^3(a^{m+1}+b)(a^{2m+2}-a^{m+1}b+b^2)$;

100. $a^2(a^{m+2}-b^m)(a^{2m+4}+a^{m+2}b^m+b^{2m})$.

英语字母表

正体		斜体		国际音标注音
大写	小写	大写	小写	
A	a	*A*	*a*	[ei]
B	b	*B*	*b*	[bi:]
C	c	*C*	*c*	[si:]
D	d	*D*	*d*	[di:]
E	e	*E*	*e*	[i:]
F	f	*F*	*f*	[ef]
G	g	*G*	*g*	[dʒi:]
H	h	*H*	*h*	[eitʃ]
I	i	*I*	*i*	[ai]
J	j	*J*	*j*	[dʒei]
K	k	*K*	*k*	[kei]
L	l	*L*	*l*	[el]
M	m	*M*	*m*	[em]
N	n	*N*	*n*	[en]
O	o	*O*	*o*	[ou]
P	p	*P*	*p*	[pi:]
Q	q	*Q*	*q*	[kju:]
R	r	*R*	*r*	[ɑ:]
S	s	*S*	*s*	[es]
T	t	*T*	*t*	[ti:]
U	u	*U*	*u*	[ju:]
V	v	*V*	*v*	[vi:]
W	w	*W*	*w*	['dʌblju:]
X	x	*X*	*x*	[eks]
Y	y	*Y*	*y*	[wai]
Z	z	*Z*	*z*	[zed]

常用希腊字母表

正体		斜体		读音拼音
大写	小写	大写	小写	
Α	α	A	α	阿尔发 alpha
Β	β	B	β	培他 beta
Γ	γ	Γ	γ	伽玛 gamma
Δ	δ	Δ	δ	台尔他 delta
Ε	ε	E	ε	依浦西隆 epsilon
Θ	ϑ	Θ	ϑ	西塔 theta
Λ	λ	Λ	λ	来姆达 lambda
Μ	μ	M	μ	弥优 mu
Ν	ν	N	ν	纽 nu
Π	π	Π	π	派爱 pi
Ρ	ϱ	P	ρ	罗 rho
Σ	σ, ς	Σ	σ	西格玛 sigma
Φ	φ, ϕ	Φ	φ, ϕ	非 phi
Ω	ω	Ω	ω	喔米茄 omega